

# **Reduzierte Modellbildung für die dynamische Inversion von Magnetfeldmessungen an Planeten**

Von der Fakultät für Elektrotechnik, Informationstechnik, Physik  
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

zur Erlangung des Grades eines Doktors  
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation

von Christian Nabert

aus Braunschweig

eingereicht am: 08.12.2016

mündliche Prüfung (Disputation): 16.03.2017

1. Referent: Prof. Dr. Karl-Heinz Glaßmeier

2. Referent: Prof. Dr. Uwe Motschmann

Druckjahr: 2017



# Vorveröffentlichungen von Teilen der Dissertation

Teilergebnisse aus dieser Arbeit wurden mit Genehmigung der Fakultät für Elektrotechnik, Informationstechnik, Physik, vertreten durch den Mentor der Arbeit, in folgenden Beiträgen vorab veröffentlicht:

## Publikationen

Nabert, C., Glassmeier, K.-H., Plaschke, F., 2013, A new method for solving the MHD equations in the magnetosheath, *Annales Geophysicae*, 31, 419–437.

Nabert, C., Othmer, C., Glassmeier, K.-H., 2015, Solar wind reconstruction from magnetosheath data using an adjoint approach, *Annales Geophysicae*, 33, 1513–1524.

Nabert, C., Glassmeier, K.-H., 2016a, The influence of resistivity gradients on shock conditions for a Petschek reconnection geometry, *Annales Geophysicae*, 34, 421–425.

Nabert, C., Glassmeier, K.-H., 2016b, Estimating the plasma resistivity with a reduced MHD model of magnetic diffusion, eingereicht bei: *Annales Geophysicae*.

Nabert, C., Heyner, D., Glassmeier, K.-H., 2016a, Estimation of a planetary magnetic field using a reduced MHD model, eingereicht bei: *Annales Geophysicae*.

Nabert, C., Othmer, C., Glassmeier, K.-H., 2016b, Estimating a planetary magnetic field with time-dependent global MHD simulations using an adjoint approach, eingereicht bei: *Annales Geophysicae*.

Heyner, D., Nabert, C., Liebert, E., Glassmeier, K.-H., 2016, Concerning the Reconnection-Induction Balance at the Magnetopause of Mercury, *Journal of Geophysical Research, Space Physics*, 121, 2935–2961.

Liebert, E., Nabert, C., Perschke, C., Fornacon, K.-F., Glassmeier, K.-H., 2016, Statistical survey of day-side magnetospheric current flow using Cluster observations: Magnetopause, eingereicht bei: *Annales Geophysicae*.

---

## Tagungsbeiträge

Nabert, C., Plaschke, F., Glassmeier, K.-H., Sibeck, D. G., Angelopoulos, V., Auster, H. U., McFadden, J. P., 2011, A gas dynamic magnetopause transition observed by THEMIS, Poster, EGU (European Geosciences Union) General Assembly 2011, Wien.

Nabert, C., Plaschke, F., Glassmeier, K.-H., Sibeck, D. G., Angelopoulos, V., 2011, Gas Dynamic-Type Magnetopause Transition: Theoretical Investigations, Poster, AGU (American Geophysical Union) Fall Meeting 2012, San Francisco.

Nabert, C., Othmer, C., Glassmeier, K.-H., Heyner, D., 2014, Planetare Magnetfelder: Trennung externer und interner Anteile mit einem Adjungierten-Verfahren, Vortrag, 74. Jahrestagung der DGG (Deutschen Physikalischen Gesellschaft), Karlsruhe.

Nabert, C., 2014, Adjoint method as a tool to separate planetary magnetic fields, Vortrag, 5. MAG (Magnetometer) Workshop, Tanvald.

Nabert, C., 2014, Separation of Planetary Magnetic Fields, Vortrag, 5th HEWG (Herman Environment Working Group) Meeting, Killarney.

Nabert, C., Glassmeier, K.-H., Heyner, D., Othmer, C., 2014, Magnetic Field Separation Around Planets Using an Adjoint-Method Approach, Poster, The 40th COSPAR (Committee on Space Research) Scientific Assembly, Moskau.

Nabert, C., 2015, Magnetic Field Reconstruction Using an MHD Model, Vortrag, J-MAG (Juice-Magnetometer) Science Team Meeting, San Francisco.

Nabert, C., Othmer, C., Glassmeier, K.-H., 2015, Efficient estimation of MHD parameters from magnetosheath observations, Poster, AGU Fall Meeting 2015, San Francisco.

Nabert, C., 2015, Geometric properties characterizing dayside Hall reconnection, Vortrag, THEMIS Post AGU Meeting 2015, San Francisco.

Nabert, C., 2016, Separation of the magnetic field at Mercury, Vortrag, 2nd HEWG Workshop, Rovaniemi.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzzusammenfassung</b>	<b>7</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>9</b>
1.1 Die Planeten Erde und Merkur . . . . .	12
1.2 Sonnenwindbedingungen . . . . .	18
1.3 Die Raumfahrtmissionen BepiColombo und THEMIS . . . . .	21
1.4 Separation von Magnetfeldanteilen . . . . .	23
1.5 Magnetohydrodynamik . . . . .	24
<b>2 MHD-Simulationscode</b>	<b>33</b>
2.1 Lax-Wendroff-Schema . . . . .	34
2.2 Rand- und Anfangsbedingungen . . . . .	37
2.3 Validierung und Datenvergleich . . . . .	42
<b>3 Datenassimilation mit einer MHD-Simulation</b>	<b>57</b>
3.1 Kostenfunktion und ihre Minimierung . . . . .	57
3.2 Automatisches Differenzieren und adjungierten Methode . . . . .	59
3.3 Adjungierter MHD-Simulationscode . . . . .	64
3.4 Schätzung der planetaren Magnetfeldparameter . . . . .	67
<b>4 Reihenentwicklungsmodelle der Wechselwirkung</b>	<b>73</b>
4.1 Theorie . . . . .	73
4.1.1 Grundgleichungen . . . . .	74
4.1.2 Randbedingungen an der Bugstoßwelle . . . . .	82
4.1.3 Schließungsbedingungen . . . . .	86
4.1.4 Innere Randbedingungen durch das Erdmagnetfeld . . . . .	86
4.2 Analytische Näherung der Umströmung . . . . .	88
4.2.1 Allgemeine Lösung des Systems nullter Ordnung . . . . .	88
4.2.2 Randbedingungen des Modells nullter Ordnung . . . . .	91
4.3 Berechnungsalgorithmus für ein Reihenentwicklungsmodell . . . . .	95
4.4 Untersuchungen der Reihenentwicklungsmodelle . . . . .	98
4.4.1 Beziehungen zu anderen Modellen . . . . .	98
4.4.2 Vergleich mit THEMIS-Daten . . . . .	99
4.5 Quasi-stationäre Zeitskalen . . . . .	106
4.6 Vergleich mit dem MHD-Simulationscode . . . . .	107

<b>5</b>	<b>Prozesse aufgrund einer endlichen Resistivität</b>	<b>113</b>
5.1	Anstauen und Rekonnexion in der Magnetosheath . . . . .	113
5.2	Erweiterung der Reihenentwicklungsmodelle . . . . .	115
5.3	Analytische Näherung für magnetische Rekonnexion und Diffusion . . .	118
5.3.1	Allgemeine Lösung des Systems nullter Ordnung . . . . .	118
5.3.2	Geometrie der Diffusionsregion . . . . .	123
5.4	Magnetopausenlage bei südwärtigem Sonnenwindmagnetfeld . . . . .	125
5.5	Schätzung der Resistivität durch Diffusion . . . . .	128
<b>6</b>	<b>Einfluss einer inhomogenen Resistivität auf die Bedingungen für Stoßwellen</b>	<b>131</b>
6.1	Quasi-eindimensionale Betrachtung . . . . .	132
6.2	Zweidimensionale Diffusionsregion . . . . .	134
6.3	Auswirkungen einer inhomogenen Resistivitätsverteilung . . . . .	136
<b>7</b>	<b>Schätzung planetarer Magnetfeldparameter mit einem Reihenentwicklungsmodell</b>	<b>139</b>
7.1	Abhängigkeit der Magnetosheathgeometrie vom Dipolmoment . . . . .	140
7.2	Methoden zur Schätzung des Dipolmoments . . . . .	141
<b>8</b>	<b>Rekonstruktion von Sonnenwindbedingungen</b>	<b>149</b>
8.1	Schätzverfahren für Sonnenwindparameter . . . . .	150
8.2	Anwendung . . . . .	154
8.2.1	Rekonstruktion nahe der Stagnationslinie . . . . .	154
8.2.2	Rekonstruktion neben der Stagnationslinie . . . . .	158
8.3	Simultane Schätzung von Sonnenwind- und Magnetfeldparametern . . . .	161
<b>9</b>	<b>Berechnung der Wechselwirkung mit einer Projektionsabbildung</b>	<b>165</b>
9.1	Bestimmung der Projektionsabbildung . . . . .	165
9.2	Vergleich zum MHD-Simulationscode . . . . .	171
9.3	Korrekturen aufgrund von Diffusionsparametern . . . . .	173
9.4	Verallgemeinerungen . . . . .	174
<b>10</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>177</b>
<b>A</b>	<b>Koordinatentransformationen</b>	<b>183</b>
<b>B</b>	<b>Details zum MHD-Simulationscode</b>	<b>187</b>
B.1	Implementierung in Fortran . . . . .	187
B.2	Einstellungen für die MHD-Simulationen . . . . .	193
<b>C</b>	<b>Gradientenberechnung mit einem Quasi-Newton-Verfahren</b>	<b>199</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>203</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>213</b>

# Kurzzusammenfassung

Die Wechselwirkung eines planetaren Magnetfeldes mit dem Sonnenwind ruft elektrische Ströme hervor, die die Magnetfeldverteilung am Planeten beeinflussen. In dieser Arbeit werden Methoden vorgestellt, mit denen der planetare Anteil des Magnetfeldes mit Raumfahrzeugdaten aus der komplexen Planetenumgebung bestimmt und die Prozesse der Interaktion analysiert werden können. Auf diese Weise lässt sich in Hinblick auf Messungen der kommenden BepiColombo-Mission das intrinsisch erzeugte Magnetfeld von Merkur korrekt schätzen.

Zunächst wird die Wechselwirkung über einen magnetohydrodynamischen Simulationscode berechnet, wobei das Magnetfeld des Planeten, zeitabhängige Sonnenwindbedingungen und Diffusionskoeffizienten des Plasmas als Parameter in das Modell eingehen. Eine Schätzung der planetaren Magnetfeldparameter erfolgt dann durch die Minimierung der Abweichungen zwischen den Modelllösungen und Raumfahrzeugmessungen aus der Wechselwirkungsregion. Für die effiziente Berechnung einer großen Anzahl von Parametern wird die Anwendung eines adjungierten Modells untersucht. Eine erste Bestimmung des Erdmagnetfeldes mit THEMIS-Daten aus der Magnetosheath validiert das Schätzverfahren im Rahmen statistischer und systematischer Fehler.

Über eine Reihenentwicklungsmethode werden reduzierte MHD-Modelle hergeleitet, um mit einem geschätzten planetaren Magnetfeld die Wechselwirkungsprozesse detailliert zu analysieren. Die Modelle beschreiben die wichtigsten physikalischen Prozesse in der Magnetosheath, wie ein Anstauen des Sonnenwindmagnetfeldes vor der Magnetopause, magnetische Diffusion und Rekonnexion. Mit den Ergebnissen lassen sich unter anderem der magnetische Diffusionsparameter und die elektrische Leitfähigkeit des Plasmas schätzen. Weiterhin wird der Einfluss einer Inhomogenität in der Leitfähigkeitsverteilung auf die Bedingungen für Stoßwellen und die damit zusammenhängende Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen betrachtet.

Die Ergebnisse der reduzierten Modelle zeigen, dass der Simulationscode einen zu großen numerischen Diffusionsparameter benötigt, welcher die Schätzung des planetaren Magnetfeldes systematisch verfälscht. Mit einem reduzierten Modell ohne magnetische Diffusion lässt sich aus Daten nahe der Stagnationslinie eine verbesserte Schätzung für das planetare Magnetfeld durchführen. Die Berücksichtigung vieler Magnetosheathdurchgänge von Satelliten minimiert den statistischen Fehler in der Schätzung. Dazu werden die effizienten reduzierten Modelle genutzt, um auch eine zeitaufwendige simultane Schätzung von planetaren Magnetfeld- und Sonnenwindparametern durchzuführen, falls sich zwei Raumfahrzeuge innerhalb der Wechselwirkungsregion befinden. Außerdem wird durch eine Projektionsabbildung die Gültigkeit der reduzierten Modelle von der Stagnationslinie auf das Gebiet der magnetohydrodynamischen Simulation erweitert.





# 1 Einführung

Einige Planeten, wie zum Beispiel Erde und Merkur, besitzen ein globales äußeres Magnetfeld, das im Planeteninneren erzeugt wird. Diese Magnetfelder interagieren mit einer von der Sonne ausgehenden Strömung geladener Teilchen, dem Sonnenwind. Dabei entstehen elektrische Ströme, die das planetare Magnetfeld, also den sonnenwindunabhängigen Anteil am Magnetfeld, modifizieren. Ist das planetare Magnetfeld hinreichend groß, umströmt der Sonnenwind den Planeten in einem gewissen Abstand. Die Region der Umströmung wird als Magnetosheath und der davon eingeschlossene Bereich als Magnetosphäre bezeichnet. Die Grenzschicht dazwischen ist die Magnetopause (siehe Abb. 1.1).

Für eine supersonische Sonnenwindströmung, wie sie im Allgemeinen bei der Erde oder dem Merkur auftritt, begrenzt eine Bugstoßwelle die Magnetosheath zur Sonne hin. Die Stoßwelle bremst und lenkt den ankommenden Sonnenwind ab, sodass dieser außerhalb der Magnetosphäre um den Planeten herum strömt. An einem Punkt, dem Staupunkt, trifft die Strömung senkrecht auf die Magnetopause. Die zugehörige dort endende Stromlinie ist die sogenannte Staupunktstromlinie oder Stagnationslinie.

Die Eigenschaften der Wechselwirkungsregion hängen nicht nur vom planetaren Magnetfeld ab, sondern auch von den ständig variierenden Sonnenwindbedingungen. Beispielsweise führt ein stärkerer Anströmdruck des Sonnenwindes zu einer Verschiebung der Magnetosheath zum Planeten hin. Damit geht auch eine Verschiebung der elektrischen Ströme einher, die die Magnetfeldverteilung am Planeten verändert. Auch der Sonnenwind selbst kann ein Magnetfeld mitführen. Besitzt das Plasma eine endliche elektrische Leitfähigkeit, eine Resistivität, durchdringen sich Sonnenwind- und planetares Magnetfeld nahe der Magnetopause zu einem gewissen Teil. Dieser Diffusionsprozess führt bei einer antiparallelen Magnetfeldkonfiguration zu magnetischer Rekonnexion. Dabei überlagern die Magnetfelder unterschiedlichen Ursprungs einander, was in einer lokal kleineren Magnitude des Magnetfeldes resultiert. Die Energie im Magnetfeld wird dabei in kinetische Energie umgewandelt, wodurch es zu einer Beschleunigung des Sonnenwindplasmas kommt.

Die Wechselwirkung zwischen dem Sonnenwind und dem planetaren Magnetfeld wird in dieser Arbeit im Rahmen der Magnetohydrodynamik (MHD) betrachtet. Dabei beschreibt ein magnetisierbares Fluid das kollektive Verhalten der Teilchen des Sonnenwindplasmas. Die zeit- und ortsabhängigen Differenzialgleichungen der MHD werden zum Berechnen der Wechselwirkung genutzt, wobei die Rand- und Anfangsbedingungen aus Sonnenwindinformationen und dem planetaren Magnetfeld zu bestimmen sind.

Voraussichtlich im Jahr 2025 erreicht die europäisch-japanische Raumfahrtmission BepiColombo (Benkhoff et al. 2010) den Planeten Merkur. Im Gegensatz zu vorherigen Missionen zum Merkur vermessen zwei Raumfahrzeuge gleichzeitig die Magnetfeldverteilung in der Umgebung des Planeten. Anders als bei der Erde ist die Wechselwirkungs-

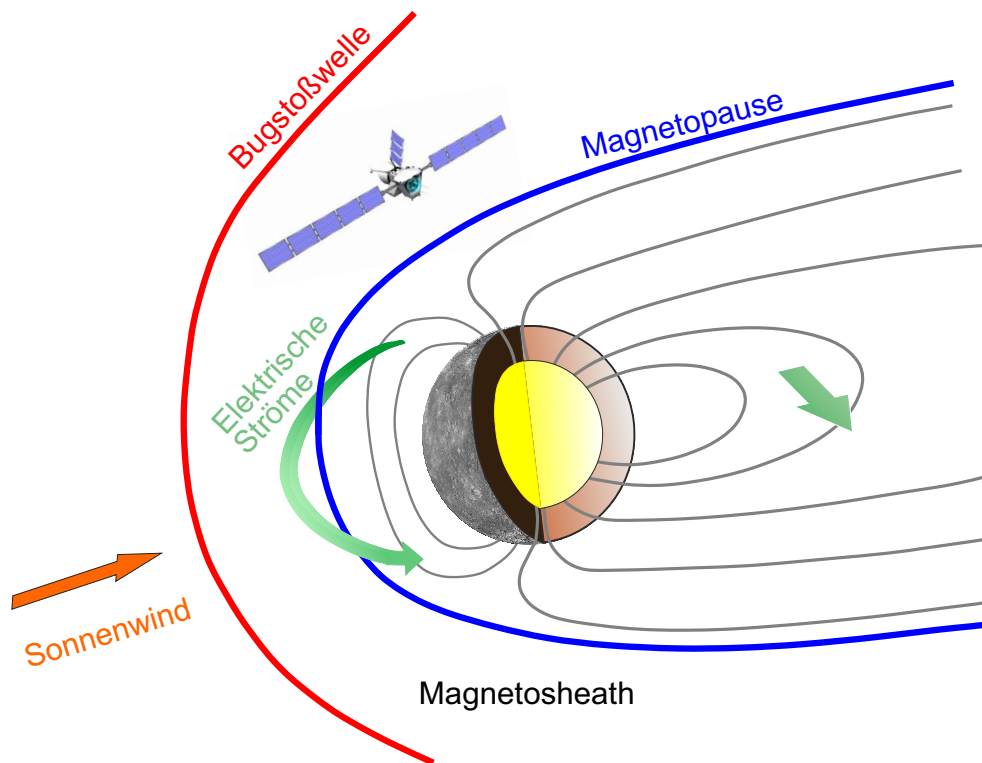


Abbildung 1.1: Die Wechselwirkung des Sonnenwindes mit dem planetaren Magnetfeld des Merkur ruft elektrische Ströme hervor, die den Sonnenwind derart beeinflussen, dass dieser den Planeten in der Magnetosheath umströmt. Aufgrund des supersonischen Sonnenwindes wird die Magnetosheath sonnenwärts durch eine Bugstoßwelle begrenzt. Ein Raumfahrzeug in der Umgebung von Merkur misst stets eine Überlagerung des planetaren Magnetfeldes und der Magnetfeldanteile von den elektrischen Strömen der Wechselwirkung.

region bei Merkur aufgrund des etwa hundert Mal schwächeren planetaren Magnetfeldes deutlich kleiner. Daher befindet sich die Magnetosheath sehr viel näher an der Oberfläche des Planeten. Als Konsequenz ist der Anteil durch die elektrischen Ströme der Wechselwirkung auch in unmittelbarer Nähe zum Planeten nicht vernachlässigbar. Die Wechselwirkung und ihre Zeitabhängigkeit muss berücksichtigt werden, um das intrinsische Magnetfeld von Merkur zu bestimmen. Dafür eignet sich die BepiColombo-Mission wegen ihrer zwei Raumfahrzeuge in besonderem Maße.

Bei der Erde gab es, vergleichbar zu BepiColombo, Missionen mit mehreren Raumfahrzeugen. Beispielsweise lieferte die Mission THEMIS (Time History of Events and Macroscale Interactions during Substorms) mit ihren fünf Satelliten Daten aus vielen Bereichen der Wechselwirkungsregion (Angelopoulos 2008). Damit wurde, ähnlich wie es für BepiColombo geplant ist, auch die gleichzeitige Messung an unterschiedlichen Orten durchgeführt. Anders als bei Merkur spielt bei der Erde die Wechselwirkung des Sonnenwindes nahe der Erdoberfläche eine untergeordnete Rolle. Erst in der Nähe der Magnetosheath lassen sich Veränderungen des planetaren Magnetfeldes beobachten, die vergleichbar stark zu den Modifikationen in der gesamten Magnetosphäre von Merkur sind.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, Methoden zur Analyse der Magnetfeldverteilung und Bestimmung des planetaren Magnetfeldanteils in einer durch die Wechselwirkung mit dem Sonnenwind stark beeinflussten Umgebung zu entwickeln. Die Verfahren sollen in Hinblick auf die kommende BepiColombo-Mission die Interpretation der Messungen bei Merkur verbessern. Wesentlich ist dabei eine korrekte Bestimmung des intrinsischen Magnetfeldes aus den Messungen aller Raumfahrzeuge. Man muss beachten, dass insbesondere bei Merkur der Einfluss der Wechselwirkung am Planeten nirgends vernachlässigbar ist. Beim Modellieren dieser komplexen Situation gibt es mehrere Herausforderungen. Einerseits gilt es, systematische Fehler zu vermeiden, wie sie zum Beispiel bei einer numerischen Umsetzung des Wechselwirkungsmodells auftreten können. Andererseits muss die zeitabhängige Wechselwirkung effizient berechnet werden, um die laufzeitintensive Parameterschätzung des planetaren Magnetfeldes für ein möglichst detailliertes Modell anwenden zu können.

Der Aufbau dieser Arbeit ist im Folgenden kurz dargestellt. Anknüpfend an die vorangegangene Einleitung werden in diesem Kapitel einige Grundlagen über die planetaren Magnetfelder von Erde und Merkur, den Sonnenwind sowie die Beschreibung der Wechselwirkung im Rahmen der MHD präsentiert.

Im nächsten Kapitel erfolgt die Ausarbeitung eines MHD-Simulationscodes, welcher die Wechselwirkung zwischen dem zeitabhängigen Sonnenwind und der Erde berechnet. Die Sonnenwindbedingungen sind dabei über Randwerte und das planetare Magnetfeld über Anfangsbedingungen in das numerische Schema integriert. Für einen Test des MHD-Simulationscodes werden die Ergebnisse mit Raumfahrzeugmessungen der THEMIS-Mission verglichen.

Eine Kostenfunktion quantifiziert die Abweichungen zwischen den Daten und den Simulationsergebnissen. In Kapitel 3 wird ein gradientenbasiertes Optimierungsverfahren eingeführt, das die Kostenfunktion bezüglich der planetaren Magnetfeldparameter minimiert. Weil die Berechnung eines Gradienten für viele Parameter sehr rechenintensiv ist, wird die adjungierten Methode vorgestellt, mit der der Rechenaufwand zur Bestimmung eines Gradienten nahezu unabhängig von der Anzahl der Parameter ist. Die Anwendung der adjungierten Methode für den MHD-Simulationscode erfolgt über das Verfahren des automatischen Differenzierens. Um das Optimierungsverfahren in einer durch die Wechselwirkung stark beeinflussten Region zu testen, wird das bekannte Erdmagnetfeld mit THEMIS-Daten aus der Magnetosheath geschätzt.

In Kapitel 4 erfolgt mit einem solchen ersten Schätzer für das planetare Magnetfeld eine systematische Untersuchung der Wechselwirkung und ihrer physikalischen Prozesse durch reduzierte MHD-Modelle. Diese Modelle werden über eine Reihenentwicklungsmethode in verschiedenen Ordnungen hergeleitet. Die daraus resultierenden Reihenentwicklungsmodelle für kleine Ordnungen beschreiben im Rahmen der idealen MHD die wesentlichen Prozesse der Wechselwirkung nahe der Staupunktstromlinie. Dabei wird insbesondere auch auf die Auswirkungen eines sich anstauenden Sonnenwindmagnetfeldes auf die Magnetosheathlösung eingegangen. Für die niedrigste Ordnung ist eine approximative, analytische Lösung für die Magnetosheath berechenbar. Mit den Ergebnissen lassen sich auch die Lösungen von MHD-Simulationen genauer untersuchen und systematische Fehler erkennen.

Der Einfluss des magnetischen Diffusionsparameters wird in Kapitel 5 durch eine Erweiterung der Reihenentwicklungsmodelle um eine endliche elektrische Leitfähigkeit ge-

nauer betrachtet. Mit diesen Modellen lassen sich magnetische Rekonnexion und Diffusion nahe der subsolaren Magnetopause untersuchen. Mit den Ergebnissen zum Diffusionsprozess erfolgt eine Abschätzung der magnetischen Diffusionsparameter bei der Erde und dem Merkur.

In Kapitel 6 werden die Auswirkungen einer inhomogenen Resistivitätsverteilung in einer Wechselwirkungssituation untersucht. Wegen der möglichen starken räumlichen Variationen der Resistivitätsverteilung ist dabei die Reihenentwicklungsmethode nicht anwendbar. Durch die Betrachtung von Singularitäten in den MHD-Gleichungen stellt sich heraus, dass ein Gradient in der Resistivität die Bedingungen für das Auftreten von Stoßwellen und die damit verbundene Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen modifizieren kann.

Aus der Analyse der Diffusionsparameter geht hervor, dass die Berechnung der Wechselwirkung nahe der Stagnationslinie durch ein Reihenentwicklungsmodell einen kleineren systematischen Fehler ergibt als mit dem MHD-Simulationscode. Daher wird in Kapitel 7 das Reihenentwicklungsmodell niedrigster Ordnung genutzt, um die Schätzung des planetaren Magnetfeldes zu verbessern. Mit Raumfahrzeugmessungen aus der Magnetosheath im Gültigkeitsbereich dieses reduzierten MHD-Modells, nahe der Stagnationslinie, wird das Dipolmoment geschätzt. Aufgrund der effizienten und schnellen Berechnung der Wechselwirkung mit dem Reihenentwicklungsmodell lässt sich eine größere Datenmenge analysieren und damit auch unterschiedliche Einflussfaktoren auf den statistischen Fehler der Schätzung näher untersuchen.

Zur Verringerung des statistischen Fehlers wird die Berücksichtigung von Messungen zweier Raumfahrzeuge innerhalb der Wechselwirkungsregion zur Schätzung des Dipolmoments betrachtet. Mit dem Reihenentwicklungsmodell niedrigster Ordnung lässt sich die Wechselwirkung effizient berechnen, sodass auch eine Rekonstruktion von Sonnenwindbedingungen aus Raumfahrzeugdaten der Wechselwirkungsregion nahe der Stagnationslinie durchführbar ist. In Kapitel 8 wird das Rekonstruktionsverfahren eingeführt und anhand von THEMIS-Messungen aus der Magnetosheath verifiziert. Damit ist auch die simultane Schätzung der Sonnenwindbedingungen und des Dipolmoments mit Messungen von zwei Raumfahrzeugen innerhalb der Wechselwirkungsregion möglich.

In Kapitel 9 wird eine Projektionsabbildung eingeführt, mit der sich die Gültigkeit des effizient zu berechnenden Reihenentwicklungsmodells niedrigster Ordnung auf die gesamte Wechselwirkungsregion erweitern lässt. Aus einem Vergleich des MHD-Simulationscodes und des Reihenentwicklungsmodells ergibt sich die benötigte Abbildungsvorschrift. Den Schluss dieser Arbeit bilden eine Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse und ein Ausblick auf mögliche Erweiterungen in Kapitel 10.

## 1.1 Die Planeten Erde und Merkur

In dieser Arbeit werden Verfahren entwickelt, die eine Schätzung des planetaren Magnetfeldes mit Raumfahrzeugdaten ermöglichen. Damit lassen sich die Magnetfeldquellen im Inneren des Planeten genauer bestimmen, was Rückschlüsse auf seinen inneren Aufbau sowie seine Struktur erlaubt. So erfordert ein Dynamoprozess Konvektion und damit zum Beispiel einen flüssigen Kern (siehe z. B. Moffatt 1978, Stevenson 1983, 2010). Die Kenntnisse über den Aufbau von Planeten helfen dabei den aktuellen Zustand un-

seres Sonnensystems genauer zu spezifizieren und dadurch seine Entstehung besser zu verstehen (siehe z. B. Solomon 1976, Ruff und Anderson 1980).

Die innere Struktur der Erde und seine magnetfelderzeugenden Prozesse sind gut untersucht. Einen Einblick in die Grundlagen des Erdmagnetfeldes kann beispielsweise bei Rikitake (1966), Merrill und McElhinny (1983) oder Campbell (2001) gefunden werden. Die Erde ist näherungsweise kugelförmig mit einem Erdradius von  $R_E = 6371$  km und besteht im Wesentlichen aus einem Kern, einem Mantel und einer Kruste. Der Kern lässt sich in einen festen inneren und einen flüssigen äußeren Kern unterteilen, wobei die Grenze bei ungefähr 1220 km liegt. Konvektionsströme im äußeren Kern transportieren heißes Material nahe des inneren Kerns nach außen, das dabei abkühlt, wodurch das Material wieder absinkt. Das stark eisenhaltige Material im äußeren Kern kann als eine elektrisch leitfähige Flüssigkeit betrachtet werden, welche durch die Rotation und Konvektion einen Dynamoprozess im Inneren der Erde treibt. Aktuelle Schätzungen gehen von einer elektrischen Leitfähigkeit von etwa  $1.4 \cdot 10^6$  S/m im äußeren Kern aus (Pozzo et al. 2012).

Die remanente Magnetisierung der oberen Erdkruste stellt nur einen zum Dynamo verhältnismäßig kleinen Beitrag zum Erdmagnetfeld dar, der nur nahe der Oberfläche messbar ist. Induktionseffekte können in leitfähigen Schichten aufgrund von Variationen äußerer Stromsysteme auftreten. Diese sind bei der Erde, verglichen mit der Stärke des vom Dynamo erzeugten Magnetfeldes, vernachlässigbar. Dies liegt daran, dass das Feld der externen elektrischen Ströme nahe der Oberfläche klein ist (Chapman und Bartels 1940). Damit ist das Magnetfeld, gemessen von einem Satelliten auf seinem Orbit um die Erde, im Wesentlichen durch das vom Dynamo erzeugte Magnetfeld sowie die äußeren elektrischen Ströme der Wechselwirkung mit dem Sonnenwind bestimmt.

Der Anteil des Magnetfeldes, welcher von Quellen im Inneren der Erde erzeugt wird, lässt sich im Außenraum mit einer sphärisch-harmonischen Entwicklung darstellen (Gauss 1839, Glassmeier und Tsurutani 2014). Hierbei wird der Außenraum als stromfrei betrachtet und die Verschiebungsstromdichte vernachlässigt. Damit ist das Magnetfeld gemäß der Maxwell-Gleichungen sowohl divergenz- als auch rotationsfrei und kann über ein skalares Potenzial  $V_{\text{pot}}$  dargestellt werden:

$$\vec{B} = -\nabla V_{\text{pot}}, \quad (1.1)$$

wobei das Potenzial die Laplace-Gleichung

$$\Delta V_{\text{pot}} = 0 \quad (1.2)$$

erfüllt. Die Laplace-Gleichung (1.2) kann in Kugelkoordinaten  $(r, \lambda, \theta)$  transformiert werden über

$$\begin{aligned} x &= r \sin(\theta) \cos(\lambda), \\ y &= r \sin(\theta) \sin(\lambda), \\ z &= r \cos(\theta). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Die Rücktransformation ergibt sich zu

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \lambda &= \text{atan2}(y, x), \\ \theta &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Hier ist  $\text{atan2}(\cdot, \cdot)$  der Arkustangens mit zwei Argumenten. Die orthonormalen Basisvektoren der Kugelkoordinaten (1.3) sind gegeben durch

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\lambda) \\ \sin(\theta) \sin(\lambda) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\lambda = \begin{pmatrix} -\sin(\lambda) \\ \cos(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\lambda) \\ \cos(\theta) \sin(\lambda) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Werden die Kugelkoordinaten verwendet, lässt sich die Lösung im Außenraum ( $r > R_E$ ) durch Kugelflächenfunktionen darstellen als (siehe z. B. Kertz 1995, Clauser 2016)

$$V_{\text{pot}}(r, \theta, \lambda) = R_E \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left( \frac{R_E}{r} \right)^{l+1} (g_l^m \cos(m \lambda) + h_l^m \sin(m \lambda)) P_l^m(\cos(\theta)). \quad (1.6)$$

Hierbei sind  $g_l^m$  und  $h_l^m$  die Gauss-Koeffizienten und  $P_l^m(\cos(\theta))$  die nach Schmidt normierten zugeordneten Legendrepolynome. Dabei wird das  $l$ -te Legendrepolynom benutzt, welches definiert ist über die Rodrigues-Formel:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} [(x^2 - 1)^l]. \quad (1.7)$$

Die zugeordneten Legendrepolynome sind damit

$$P_l^m(x) = S_l^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \quad (1.8)$$

mit der Normierung nach Schmidt:

$$S_l^m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ \sqrt{2 \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}, & m > 0 \end{cases}. \quad (1.9)$$

Es ergeben sich beispielsweise

$$\begin{aligned} P_0^0(\cos(\theta)) &= 1, \\ P_1^0(\cos(\theta)) &= \cos(\theta), \\ P_1^1(\cos(\theta)) &= \sin(\theta) \end{aligned} \quad (1.10)$$

als zugeordnete Legendrepolynome.

Das Magnetfeld kann in Kugelkoordinaten wie folgt ausgedrückt werden:

$$\vec{B} = B_r \vec{e}_r + B_\lambda \vec{e}_\lambda + B_\theta \vec{e}_\theta. \quad (1.11)$$

Die Koeffizienten lassen sich mit Gleichung (1.1) und Gleichung (1.6) sowie dem Gradienten in Kugelkoordinaten bestimmen:

$$B_\theta = - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left( \frac{R_E}{r} \right)^{l+2} (g_l^m \cos(m \lambda) + h_l^m \sin(m \lambda)) \partial_\theta P_l^m(\cos(\theta)), \quad (1.12)$$

$$B_\lambda = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left( \frac{R_E}{r} \right)^{l+2} (g_l^m \sin(m \lambda) - h_l^m \cos(m \lambda)) \frac{m P_l^m(\cos(\theta))}{\sin(\theta)}, \quad (1.13)$$

$$B_r = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l (l+1) \left( \frac{R_E}{r} \right)^{l+2} (g_l^m \cos(m\lambda) + h_l^m \sin(m\lambda)) P_l^m(\cos(\theta)). \quad (1.14)$$

Die nicht verschwindenden Koeffizienten niedrigster Ordnung in  $l$ , also  $g_1^0$ ,  $g_1^1$  und  $h_1^1$ , sind dem magnetischen Dipolmoment zugeordnet. Der damit verknüpfte Magnetfeldvektor  $\vec{B}_{\text{Dipol}}$  lässt sich in kartesischen Koordinaten ausdrücken durch

$$\vec{B}_{\text{Dipol}} = \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{m})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}. \quad (1.15)$$

Dabei sind die Komponenten des Vektors des Dipolmoments  $\vec{m} = (m_x, m_y, m_z)^T$  über die Gleichungen

$$\begin{aligned} m_x &= R_E^3 g_1^1, \\ m_y &= R_E^3 h_1^1, \\ m_z &= R_E^3 g_1^0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

mit den Gauss-Koeffizienten verknüpft.

Für die Bestimmung der Gauss-Koeffizienten des planetaren Magnetfeldes über die sphärisch-harmonische Entwicklung wird ein körperfestes Koordinatensystem der Erde benötigt, das GEO-(geographische)-Koordinatensystem. Der Ursprung des Koordinatensystems befindet sich im Zentrum der Erde. Die  $z$ -Achse ist parallel zur Rotationsachse der Erde, die  $x$ -Achse liegt in der Äquatorebene und geht durch den Greenwich-Meridian. Die  $y$ -Achse vervollständigt ein rechtshändiges Orthogonalsystem. Zeitangaben in Universal Time (UT) geben die lokale Zeit am Greenwich-Meridian an.

Alle fünf Jahre werden für die Erde die aktuellen Gauss-Koeffizienten als IGRF (International Geomagnetic Reference Field) publiziert. Dabei werden die Gauss-Koeffizienten aus Magnetfelddaten von Bodenstationen und Satelliten nahe der Erdoberfläche bestimmt. Der Einfluss von äußeren Stromsystemen durch die Wechselwirkung der Erde mit dem Sonnenwind wird in der Bestimmung der Koeffizienten vernachlässigt. Für das Jahr 2010 ergaben sich folgende Gauss-Koeffizienten für die Dipolanteile (Finlay et al. 2010):

$$\begin{aligned} g_1^0 &= -29496.5 \text{ nT}, \\ g_1^1 &= -1585.9 \text{ nT}, \\ h_1^1 &= 4945.1 \text{ nT}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Ausgedrückt als Vektor des Dipolmoments der Erde über die Gleichungen (1.16) folgt:

$$\begin{aligned} m_x &= -0.41 \cdot 10^{15} \text{ T m}^3, \\ m_y &= 1.28 \cdot 10^{15} \text{ T m}^3, \\ m_z &= -7.63 \cdot 10^{15} \text{ T m}^3. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Weiterhin waren die Quadrupolanteile (Finlay et al. 2010):

$$\begin{aligned} g_2^0 &= -2396.6 \text{ nT}, \\ g_2^1 &= 3026.0 \text{ nT}, \\ h_2^1 &= -2707.7 \text{ nT}, \\ g_2^2 &= 1668.6 \text{ nT}, \\ h_2^2 &= -575.4 \text{ nT}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Anders als bei der Erde ist der innere Aufbau des Merkur noch wenig bekannt. Merkur hat, ähnlich wie die Erde, ein Magnetfeld mit langskaliger, dipolarer Struktur. Daher vermutet man, dass dieses Feld durch einen Dynamoprozess erzeugt wird (Ness et al. 1974, 1975). Wie Radarmessungen belegen, besteht zumindest eine Schicht des Kerns auch heute noch aus geschmolzenem Material (Margot et al. 2007), wo ein Dynamoprozess stattfinden kann. Im Gegensatz zur Erde ist das äußere Magnetfeld von Merkur deutlich schwächer. Das Oberflächenfeld am Äquator ist bei der Erde mehr als hundert Mal stärker als bei Merkur. Skalenabschätzungen für einen erdähnlichen Dynamoprozess würden allerdings ein stärkeres Magnetfeld vermuten lassen (siehe z. B. Christensen 2006).

Verschiedene Möglichkeiten wurden diskutiert, um diesen Unterschied zu erklären. Beispielsweise könnte sich der Dynamoprozess nur in einer dünnen Schicht des Merkur einstellen und so ein schwaches äußeres Magnetfeld produzieren (Stanley et al. 2005). Eine andere Erklärung von Christensen (2006) ist, dass in den äußeren Schichten des Kerns, aufgrund eines subadiabatischen Temperaturgradienten, keine Konvektion stattfindet. Ein Dynamoprozess im Inneren würde zusätzlich kleinskalige, zeitlich variierende Magnetfelder erzeugen, welche allerdings durch den Skin-Effekt in der nicht-konvektiven Schichtung im äußeren Kern gedämpft würden. Möglicherweise haben aber auch die Magnetfelder externer Stromsysteme einen starken Einfluss auf den Dynamoprozess selbst. Glassmeier et al. (2007a) schlugen einen sogenannten Feedback-Dynamo vor, bei dem das Magnetfeld des Magnetopausenstroms im Entstehungsprozess des Dynamos das dynamoerzeugte Feld abschwächen kann (siehe auch Heyner et al. 2011).

Erstmalig konnte die Mariner 10 Sonde 1974 Daten über das Magnetfeld des Planeten Merkur bei einem Vorbeiflug gewinnen. Dabei wurde festgestellt, dass Merkur ein planetares Magnetfeld besitzt, welches stark genug ist, eine Umströmung des Sonnenwindes um Merkur herum zu verursachen (Ness et al. 1974). Für eine erste Abschätzung des planetaren Magnetfeldes ging man von einem in Magnitude, Ausrichtung und Position parametrisierten Dipol aus. Eine Anpassung an die Daten lieferte ein entlang der Rotationsachse ausgerichtetes Dipolmoment von  $g_1^0 = 227 \text{ nT}$  (später korrigiert auf  $g_1^0 = 350 \text{ nT}$  (Ness et al. 1975)) mit einem Abstand zum Planetenzentrum von  $0.45 R_M$ , wobei  $R_M = 2440 \text{ km}$  der Radius des Merkur ist.

Da allerdings äußere Quellen, wie beispielsweise magnetosphärische Ströme, das gemessene Magnetfeld maßgeblich beeinflussen können, versuchten unter anderem Korth et al. (2004) diese über ein Modell zu berücksichtigen. Dazu erfolgte eine Skalierung des Tsyganenko-96 Magnetosphärenmodells des Magnetfeldes der Erde (Tsyganenko 1995, 1996) auf die Magnetosphäre des Merkur. Das Magnetosphärenmodell hängt dabei von Sonnenwindparametern ab, welche aus Messungen der Mission ACE (Advanced Composition Analyzer) bestimmt wurden. Weil sich das ACE-Raumfahrzeug zu dieser Zeit in etwa 1 AU Entfernung zum Merkur befand ( $1 \text{ AU} = 149\,597\,870.7 \text{ km}$ ), nutzten sie ein Parker-Modell des Sonnenwindes (Parker 1958), um die Sonnenwindbedingungen bei Merkur zu schätzen. Basierend auf einer statistischen Analyse der Sonnenwindbedingungen konnte der Fall eines starken sowie der Fall eines schwachen Sonnenwinddrucks betrachtet werden. Unter Berücksichtigung der abgeschätzten Magnetfeldbeiträge äußerer Quellen wurde aus den Mariner 10 Daten das Dipolmoment im Bereich von  $198 \text{ nT} \leq g_1^0 \leq 347 \text{ nT}$  abgeschätzt.

Nach Mariner 10 konnte 2008 die Raumsonde MESSENGER (Mercury Surface, Space Environment, Geochemistry and Ranging) wieder Magnetfelddaten aus Vorbeiflü-



gen am Merkur gewinnen (Solomon et al. 2001). Alexeev et al. (2010) nutzte die Messungen der Mariner 10 und MESSENGER Vorbeiflüge, um das planetare Magnetfeld von Merkur zu schätzen. Dazu wurde mit einem auf die Situation beim Merkur skalierten empirischen Paraboloid-Modell der Erdmagnetosphäre, die im Modell parametrisierten magnetosphärischen elektrischen Ströme sowie ein planetares Dipolfeld an die Daten angepasst. Es ergab sich ein Dipolmoment von  $g_1^0 = 196 \text{ nT}$  mit einem Abstand des Dipols zum Planetenzentrum von  $405 \text{ km} = 0.166 R_M$ .

Im Jahr 2011 trat die MESSENGER-Raumsonde in einen Orbit um Merkur ein und lieferte die bislang größte Datenbasis von Magnetfeldbeobachtungen für diesen Planeten. Johnson et al. (2012) verwendeten die Daten, um das planetare Magnetfeld des Merkur, ähnlich wie es Korth et al. (2004) und Alexeev et al. (2010) zuvor taten, abzuschätzen. Dabei wurde wieder ein empirisches Magnetosphärenmodell verwendet, um die Wechselwirkung einzubeziehen. Das Modell berücksichtigt einen planetaren Dipol sowie Magnetfelder der elektrischen Ströme an der Magnetopause und im Schweif. Das empirische Modell wurde anhand der Wechselwirkung des Sonnenwindes mit der Erde erstellt und besitzt 12 Parameter, um es an die Situation bei Merkur anzupassen. Darunter sind auch die Parameter eines planetaren Dipols, welcher mit den Gauss-Koeffizienten und einem möglichen Versatz (englisch: Offset) aus dem Planetenzentrum parametrisiert ist. Solch ein Dipol, der auch einen Versatz aus dem Planetenzentrum berücksichtigt, heißt Offset-Dipol. Der Versatz lässt sich durch eine verschwindende Radialkomponente im Magnetfeld, den magnetischen Äquator, ermitteln. Nach Johnson et al. (2012) ergibt sich ein Versatz von  $479 \pm 9 \text{ km}$ . Schlussendlich wurde, im Rahmen der Anpassung der Parameter des Modells, das Dipolmoment bestimmt zu  $g_1^0 = 190 \pm 10 \text{ nT}$ . Dabei bezieht sich die Angabe des Fehlers im Dipolmoment auf die verwendete Schrittweite im Anpassungsalgorithmus. Der Fehler berücksichtigt folglich keine systematischen Modellfehler und auch nicht die Güte der Anpassung zwischen Modell und Daten. Der tatsächliche Fehler kann daher wesentlich größer sein als es diese Angabe suggeriert.

Bei der Verwendung von empirischen Modellen der Wechselwirkung zwischen dem Sonnenwind und dem planetaren Magnetfeld kann es unbemerkt zu verschiedenen Fehlern kommen. Wenn empirische Modelle nur wenige Parameter zur Anpassung der Stromsysteme der Wechselwirkung beinhalten, wurden in der Regel viele Annahmen über die Stromsysteme getroffen, welche jedoch nicht notwendigerweise zutreffen müssen. Werden hingegen viele Parameter genutzt, ist es aufgrund der endlichen Datenabdeckung nicht immer möglich, alle Parameter eindeutig zu bestimmen. Dies gilt insbesondere dann, wenn die zeitabhängigen Variationen der Wechselwirkung zu berücksichtigen sind.

Anders als in den bisherigen Schätzungen des planetaren Magnetfeldes wird in dieser Arbeit kein empirisches Modell benutzt, sondern die Wechselwirkung im Rahmen der MHD beschrieben. Es sind keine Parameter zur Anpassung von Stromsystemen nötig, wodurch nur ein Minimum an Parametern im Modell Verwendung findet. Dadurch lassen sich alle Daten nutzen, um die verbleibenden Parameter mit höchst möglicher Genauigkeit statistisch zu schätzen. Statistische Fehler können sich dabei beispielsweise durch eine gewisse Unkenntnis der Anfangs- oder Randbedingungen sowie aus Messfehlern ergeben. Die Schätzung der planetaren Magnetfeldparameter lässt sich verifizieren, indem alle Daten entlang der Trajektorie des Raumfahrzeugs mit der Lösung des verwendeten Modells verglichen werden. Abweichungen außerhalb der statistischen Fehler können dann auf noch nicht korrekt berücksichtigte Eigenschaften der Wechselwirkung hindeu-

ten. Das Modell kann sukzessive erweitert werden und mehr Prozesse berücksichtigen, um die Abweichungen zu verringern.

Zum Beispiel wäre es möglich, leitfähige Schichten im Planeten einzuführen, um die damit zusammenhängenden Induktionseffekte zu betrachten. Da das planetare Magnetfeld von Merkur etwa hundert Mal kleiner ist als das der Erde, sind zum einen die Stromsysteme der Wechselwirkung deutlich näher am Planeten, zum anderen macht deren Feld einen wesentlich größeren Anteil am Gesamtmagnetfeld nahe der Oberfläche aus. Dadurch können Induktionseffekte, die in der Beschreibung der Wechselwirkung zwischen Sonnenwind und Erde noch vernachlässigbar waren, bei Merkur einen signifikanten Beitrag leisten (siehe z. B. Hood und Schubert 1979, Glassmeier 2000, Grosser et al. 2004, Glassmeier et al. 2007b, Jia et al. 2015). Der Kern von Merkur besteht aus leitfähigem Material und somit kann dort ein elektrischer Strom induziert werden. Abschätzungen für den Durchmesser des Kerns aus Messungen des Gravitationsfeldes von Merkur ergeben einen Radius von etwa  $0.8 R_M$  und damit eine Mantelstärke von etwa  $0.2 R_M$  (Hauck et al. 2013).

Erst kürzlich wurde von Jia et al. (2015) eine MHD-Simulation verwendet, um den Einfluss der Induktion von zeitabhängigen Variationen des Sonnenwindes bei Merkur zu berechnen. Dabei nahmen sie eine Leitfähigkeit des Kerns  $\sigma_{\text{Kern}} = 10^5 \text{ S/m}$  an und wählten für den Mantel  $\sigma_{\text{Mantel}} = 10^{-7} \text{ S/m}$ . Die Induktion beeinflusste bei den untersuchten starken Änderungen im Sonnenwinddruck den subsolaren Magnetopausenabstand stark. Bei einer Erhöhung des Sonnenwinddrucks wirkt der Induktionsstrom dem Heranrücken der Magnetopause, aufgrund des gestiegenen Drucks, entgegen. Dadurch änderte sich die Lage der Magnetopause nur wenig.

## 1.2 Sonnenwindbedingungen

Schon früh wurde über die Existenz einer von der Sonne ausgehenden Strömung von Teilchen, den Sonnenwind, spekuliert. Einen ersten wichtigen Schritt zu einem Modell des Sonnenwindes leistete Biermann (1951). Die Beobachtung, dass Kometen einen Schweif besitzen, der stets von der Sonne weg gerichtet ist, brachte Biermann dazu ein Modell vorzuschlagen, bei dem die Wechselwirkung des Kometen mit dem Sonnenwind für die Entstehung des Schweifs verantwortlich ist. Einen weiteren Beitrag erbrachte Chapman (1954), der die thermische Leitfähigkeit eines Plasmas berechnete. Auf Grundlage der Modelle von Biermann und Chapman leitete Parker (1958) sein berühmtes Parker-Modell des Sonnenwindes aus den magnetohydrodynamischen Gleichungen ab. Im Jahr 1959 konnte die sowjetische Raumsonde Lunik 1 durch in-situ Messungen erstmals die Existenz des Sonnenwindes bestätigen. Typische Sonnenwindbedingungen für den Betrag der Ionengeschwindigkeit  $v_{\text{SW}}$ , die Ionendichte  $N_{\text{SW}}$ , den Betrag des Magnetfeldes  $|B_{\text{SW}}|$  und der Iontemperatur  $T_{\text{SW}}$  bei der Erde nach Slavin und Holzer (1981) sind in Tabelle 1.1 angegeben.

Die OMNI-Daten der NASA (National Aeronautics and Space Administration) fassen die Feld- und Teilchendaten verschiedener Raumfahrzeuge, die sich im Sonnenwind befinden, zusammen und schätzen die Sonnenwindbedingungen am subsolaren Punkt der Bugstoßwelle der Erde (siehe <http://omniweb.gsfc.nasa.gov/> und King und Papitashvili 2005). Beispielsweise wird ein zeitlich hochaufgelöster Datensatz mit einer Auflösung

Planet	Abstand zur Sonne [AU]	$N_{\text{SW}}$ [1/cm <sup>3</sup> ]	$v_{\text{SW}}$ [km/s]	$ B_{\text{SW}} $ [nT]	$T_{\text{SW}}$ [10 <sup>4</sup> K]
Merkur	0.31	73	430	46	17
	0.47	32	430	21	13
Erde	1.0	7	430	6	8

Tabelle 1.1: Typische Sonnenwindbedingungen bei Merkur und Erde nach Slavin und Holzer (1981). Bei Merkur unterscheiden sich die Bedingungen am Perihel und am Aphel auf seiner Umlaufbahn.

von einer Minute auf Grundlage der Daten von ACE (Advanced Composition Explorer), IMP (Interplanetary Monitoring Platform) 8 und Geotail berechnet. Die Raumfahrzeuge befinden sich in der Regel in einiger Entfernung zum subsolaren Punkt der Bugstoßwelle, sodass ein Modell die beobachteten Daten entsprechend zeitversetzt. Dabei werden die Sonnenwindbedingungen als konstant entlang einer sich mit dem Sonnenwind bewegenden ebenen Phasenfront angenommen. Die Laufzeitdifferenz  $\Delta t_{\text{OMNI}}$  zwischen der Position des Raumfahrzeugs  $\vec{r}_{\text{SC}}$  und der Position der subsolaren Bugstoßwelle  $\vec{r}_{\text{BS}}$  lässt sich bestimmen durch

$$\Delta t_{\text{OMNI}} = \frac{\vec{n}_{\text{P}} \cdot (\vec{r}_{\text{BS}} - \vec{r}_{\text{SC}})}{\vec{n}_{\text{P}} \cdot \vec{v}_{\text{SW}}}, \quad (1.20)$$

wobei  $\vec{v}_{\text{SW}}$  der Vektor der Sonnenwindgeschwindigkeit und  $\vec{n}_{\text{P}}$  der Normalenvektor der Phasenfront ist. Der Positionsvektor des subsolaren Punktes der Bugstoßwelle wird mit dem Bugstoßwellenmodell von Farris und Russell (1994) bestimmt. Um den Normalenvektor zu berechnen, muss man die Eigenschaften der Sonnenwindvariationen genauer spezifizieren. Dazu kann beispielsweise angenommen werden, dass es sich bei einer Variation im Sonnenwind um eine Diskontinuität handelt. Dann lässt sich der Normalenvektor über eine Minimum Varianz Analyse ermitteln (Weimer et al. 2003, Weimer 2004).

In Abbildung 1.2 sind die OMNI-Sonnenwinddaten am subsolaren Punkt der Bugstoßwelle der Erde im Januar 2008 zu sehen. Dieses Intervall zeigt typische Sonnenwindbedingungen, die stets starken Variationen unterworfen sind. Es können Sonnenwindgeschwindigkeiten zwischen 300 km/s und 750 km/s beobachtet werden. In der Teilchendichte sind kurzweilige, starke Erhöhungen, wie zum Beispiel am 5. Januar 2008, zu beobachten, mit einer Teilchendichte über 20 /cm<sup>3</sup>. Die Erhöhung vom 5. Januar 2008 kann dabei auf eine korotierende Wechselwirkungsregion (englisch: corotating interaction region) zurückgeführt werden.

Ein typischer Zeitraum für die Beobachtung von Planeten durch Raumfahrzeuge ist etwa ein (Erd-) Jahr, wie auch zunächst für die BepiColombo-Mission geplant (Benkhoff et al. 2010). Für einen solchen Zeitraum lässt sich eine Verteilungsfunktion der Sonnenwindparameter angeben, jedoch ändert sich diese von Jahr zu Jahr. Möchte man beispielsweise eine mittlere Sonnenwindgeschwindigkeit für den Zeitraum einer Mission angeben, muss diese für den Zeitraum der Mission über Messungen bestimmt werden. Um das zu verdeutlichen, sind die Verteilungsfunktionen der OMNI-Sonnenwindparameter in den Jahren 2008, 2009 und 2010 in Abbildung 1.3 aufgetragen. Die Verteilungsfunktionen in den unterschiedlichen Jahren ähneln sich, jedoch weisen sie auch signifikante Unterschiede auf. Hohe Sonnenwindgeschwindigkeiten über 550 km/s kommen in den Jahren 2008 und 2010 häufig vor, verglichen mit dem Jahr 2009. Das erste Maximum

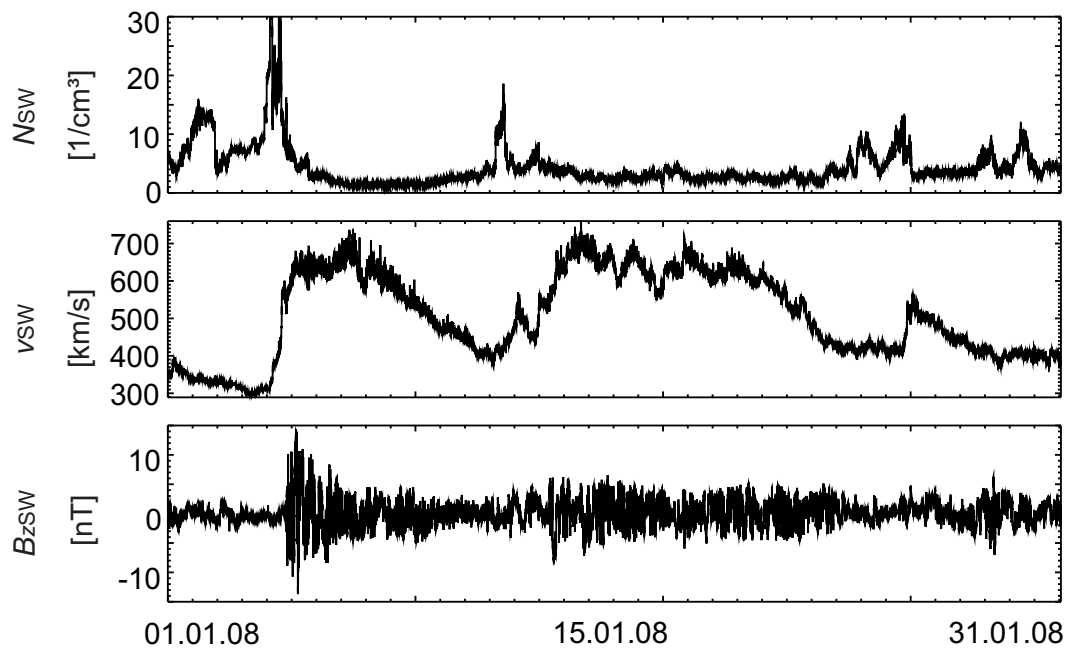


Abbildung 1.2: Die Sonnenwindbedingungen aus OMNI-Daten am subsolaren Punkt der Bugstoßwelle der Erde zwischen dem 1. Januar 2008 und dem 31. Januar 2008. Aufgetragen ist in den oberen beiden Ausschnitten die Teilchendichte der Ionen  $N_{\text{SW}}$  und deren mittlere Geschwindigkeit  $v_{\text{SW}}$  im Sonnenwind. Im unteren Ausschnitt ist die  $z$ -Komponente des Magnetfeldes  $B_{z,\text{SW}}$  angegeben.

der Geschwindigkeitsverteilung bei etwa 350 km/s beschreibt den sogenannten langsamen Sonnenwind, wohingegen die Ausläufer bei 600 km/s der Jahre 2008 und 2010 den schnellen Sonnenwind beschreiben (siehe z. B. Feldman et al. 2005). Die gezeigten Geschwindigkeitsverteilungen wurde auch schon von de Toma (2011) betrachtet und die Unterschiede im schnellen Sonnenwind ließen sich mit dem Sonnenzyklus in Verbindung bringen.

Oftmals verbringt der Satellit einen Teil seiner Umlaufbahn um einen Planeten im Sonnenwind. Dann lassen sich aus den gemessenen Sonnenwinddaten Verteilungsfunktionen des Sonnenwindes bestimmen, die sogenannten Referenzverteilungen. In Abbildung 1.4 sind aus OMNI-Daten berechnete Referenzverteilungen der Geschwindigkeit für das Jahr 2008 dargestellt. Dabei wurden pro Tag unterschiedlich lange Zeitintervalle am Anfang jedes Tages genutzt, um die Statistik mit einer Binbreite von 5 km/s zu erstellen. Die Länge eines solchen Zeitintervalls entspricht der Zeit, die sich ein Raumfahrzeug bei einem Planeten im ungestörten Sonnenwind befindet. Es ist zu erkennen, dass die Verteilung aus den Daten von 10 Minuten pro Tag bei einer Binbreite von 5 km/s an einigen Stellen starke Abweichungen zur eigentlichen Verteilung aufweist. Bei der Verwendung von 2 Stunden Intervallen pro Tag sind die Abweichungen deutlich kleiner. Je mehr Zeit ein Raumfahrzeug im Sonnenwind verbringt, desto genauer werden die Referenzverteilungsfunktionen der Sonnenwindbedingungen aus den Daten approximiert.

Die hier vorgestellten Überlegungen für die Sonnenwindbedingungen bei der Erde können auf die Situation bei anderen Planeten, wie zum Beispiel bei Merkur, übertragen

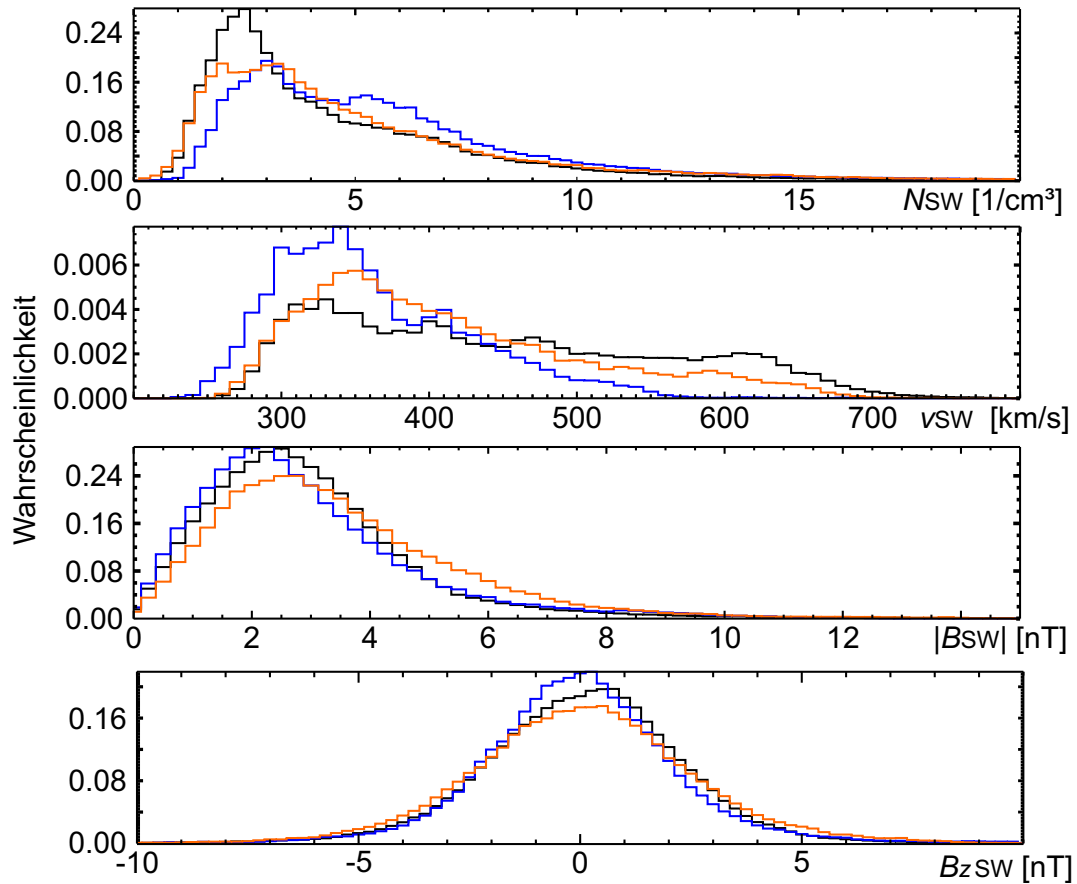


Abbildung 1.3: Häufigkeitsverteilungen der Sonnenwindbedingungen bestimmt aus OMNI-Daten für die Jahre 2008 (schwarz), 2009 (blau) und 2010 (orange) für die Ionen-Teilchendichte, die Geschwindigkeit, den Betrag des Magnetfeldes und die Magnetfeldkomponente entlang der Dipolachse des Erdmagnetfeldes.

werden. Wegen des kleineren Abstands von Merkur zur Sonne sind dort im Mittel höhere Teilchendichten und Magnetfeldstärken zu erwarten. Typische Sonnenwindbedingungen nach Slavin und Holzer (1981) finden sich für Merkur in Tabelle 1.1. Aufgrund der relativ großen Elliptizität der Bahn von Merkur um die Sonne wird dabei zwischen den Sonnenwindbedingungen am Perihel (0.31 AU) und am Aphel (0.47 AU) unterschieden.

### 1.3 Die Raumfahrtmissionen BepiColombo und THEMIS

In Hinblick auf die BepiColombo-Mission werden Methoden entwickelt, die eine Interpretation der Magnetfeldverteilung und Bestimmung ihrer Quellen in der Wechselwirkung von Merkur mit dem Sonnenwind erlauben. Die BepiColombo-Mission, benannt in Anlehnung an den italienischen Mathematiker und Ingenieur Giuseppe Colombo (\*1920 - †1984), ist eine gemeinsame Mission der ESA (European Space Agency) und der JAXA (Japan Aerospace Exploration Agency). Die beiden Raumfahrzeuge MMO (Mercury Magnetospheric Orbiter) und MPO (Mercury Planetary Orbiter) der Mission messen dann

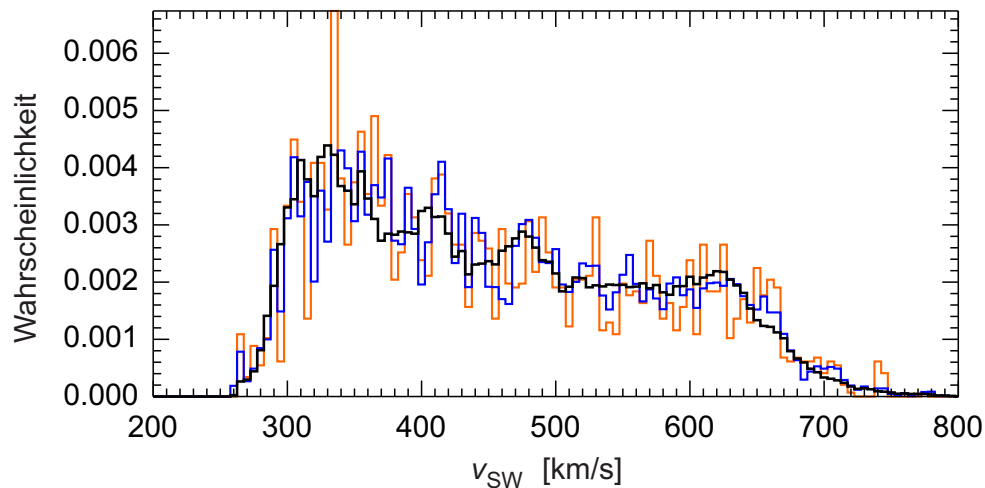


Abbildung 1.4: Die Geschwindigkeitsverteilung im Jahre 2008 aus dem vollständigen OMNI-Datensatz in schwarz, mit zwei Stunden OMNI-Daten pro Tag in blau und aus zehn Minuten pro Tag in orange.

unter anderem die Magnetfeldverteilung bei Merkur.

Nach derzeitigem Planungsstand ist der Starttermin für BepiColombo Oktober 2018. Die beiden Raumfahrzeuge erreichen voraussichtlich Ende 2025 Merkur und sollen auf polare Umlaufbahnen um den Planeten gelangen. Der Orbit von MPO wird eine Periapsis von  $2920 \text{ km} = 1.2 R_M$  und eine Apoapsis von  $3940 \text{ km} = 1.6 R_M$  zum Zentrum des Merkur haben und dabei etwa  $2.3 \text{ h}$  benötigen (siehe <http://www.sci.esa.int/>). Bei MMO soll die Umlaufbahn weiter vom Planeten entfernt liegen, mit einer Periapsis von  $3030 \text{ km} = 1.2 R_M$  und einer Apoapsis von  $14080 \text{ km} = 5.8 R_M$ . Dabei würde MMO etwa  $9.2 \text{ h}$  für einen Orbit benötigen. Beide Raumfahrzeuge sind unter anderem mit Magnetometern und Plasmainstrumenten ausgestattet. Daher werden neben dem Magnetfeld auch die Teilchendichten der Ionen und Elektronen, deren Geschwindigkeit und Temperatur gemessen.

Die in dieser Arbeit entwickelten Modelle sollen die Schätzung des planetaren Magnetfeldes in einer durch die Wechselwirkung stark beeinflussten Umgebung, wie bei Merkur, ermöglichen. Zum Testen der Modelle sollte daher eine zur BepiColombo-Mission bei Merkur vergleichbare Situation betrachtet werden. Dabei muss das planetare Magnetfeld gut bekannt sein, um seine Schätzung überprüfen zu können. Wie in Abschnitt 1.1 beschrieben, ist das planetare Magnetfeld der Erde gut bestimmt. Aufgrund des schwächeren planetaren Magnetfeldes von Merkur ist die Wechselwirkungsregion des Sonnenwindes dort dichter am Planeten als bei der Erde (Winslow et al. 2013). Die Bugstoßwelle befindet sich im Mittel etwa  $1.89 R_M$  bei Merkur und rund  $13 R_E$  bei der Erde vom Planetenzentrum entfernt. Der mittlere Abstand der Magnetopause bei Merkur ist ungefähr  $1.45 R_M$  und bei der Erde etwa  $10 R_E$ . Zwar liegt der Orbit von MPO meistens innerhalb der Magnetosphäre, jedoch ist die Magnetosphäre bei Merkur deutlich kleiner als bei der Erde. Anders als bei der Erde muss durch das schwächere planetare Magnetfeld der Einfluss der Wechselwirkung auf das Magnetfeld überall in der Magnetosphäre berücksichtigt werden (siehe z. B. Glassmeier 2000). Daher müssen zum Testen

des Schätzverfahrens bei der Erde Raumfahrzeugdaten nahe der Magnetopause genutzt werden. Nur dann sind die Magnetfelddaten ähnlich stark durch die Sonnenwindwechselwirkung beeinflusst wie in der Umgebung von Merkur.

Die Raumfahrzeuge der THEMIS-Mission lieferten Daten aus der Magnetosheathregion der Erde (Angelopoulos 2008). Die fünf Satelliten dieser Mission, bezeichnet mit THA, THB, THC, THD und THE, umkreisten die Erde auf unterschiedlichen Bahnkurven. Die Orbits ändern sich während der Mission. Ein geeigneter Zeitraum für die Magnetfeldbeobachtungen nahe der Magnetopause ist von Mitte 2008 bis Mitte 2009. In diesem Zeitraum war der Umlaufbahn von THA etwa  $(1.5 \times 10) R_E$ , wobei die erste Zahl den kürzesten und die zweite Zahl den größten Abstand zum Erdmittelpunkt angibt. Die Bahnkurve von THB war  $(1.3 \times 30) R_E$  und die von THC  $(1.2 \times 20) R_E$ . Für THD und THE ergab sich ein Orbit von  $(1.5 \times 12) R_E$ . Jeder Satellit ist dabei gleich mit Magnetometern (Auster et al. 2008) und Plasmainstrumenten (McFadden et al. 2008) ausgestattet.

Die THEMIS-Mission wurde überwiegend zur Untersuchung der Magnetosphäre der Erde genutzt. Daher sind die Daten in der Regel in für magnetosphärische Beobachtungen übliche Koordinaten verfügbar. Eine Übersicht kann beispielsweise bei Russell (1971) gefunden werden. Diese Koordinaten unterscheiden sich von den GEO-Koordinaten der Darstellung des planetaren Magnetfeldes. Gebräuchlich ist beispielsweise das GSE-(Geocentric-Solar-Ecliptic-)Koordinatensystem. Die  $x$ -Achse zeigt stets in Richtung Sonne und die  $y$ -Achse liegt in der Ekliptik und zeigt entgegen der Bewegungsrichtung der Erde um die Sonne. Die  $z$ -Achse steht senkrecht zur Ekliptik und komplettiert ein rechtshändiges Orthogonalsystem. Weit verbreitet ist auch das GSM-(Geocentric-Solar-Magnetospheric-)Koordinatensystem. Die  $x$ -Achse des GSM-Koordinatensystems stimmt mit der des GSE-Koordinatensystems überein und die  $y$ -Achse ist senkrecht zum Erddipol. Die  $z$ -Achse vervollständigt ein rechtshändiges Koordinatensystem, sodass das Dipolmoment stets in der  $xz$ -Ebene liegt.

## 1.4 Separation von Magnetfeldanteilen

Die Wechselwirkung zwischen dem Sonnenwind und einem planetaren Magnetfeld führt zu elektrischen Strömen, die die Magnetfeldverteilung in der Umgebung des Planeten beeinflussen. Daher kann ein dort gemessenes Magnetfeld sowohl durch Quellen innerhalb als auch durch welche außerhalb des Planeten bedingt sein.

Als erster trennte Gauss (1839) bei der Erde die inneren und äußeren Magnetfeldquellen und erkannte, dass das Magnetfeld an der Erdoberfläche im Wesentlichen von Quellen aus dem Erdinneren bestimmt wird. Dazu führte er die sphärisch-harmonische Analyse ein, die das Magnetfeld durch ein skalares Potenzial  $V_{\text{pot}}$  in einem stromfreien Gebiet vollständig beschreibt. Das Potenzial ist in Gleichung (1.1) definiert und führt auf die Laplace-Gleichung (1.2). Eine Lösung für  $r > R_E$  findet sich in Gleichung (1.6). In der sphärisch-harmonischen Analyse wird die allgemeine Lösung, die sowohl Anteile für das Planeteninnere als auch für den Raum außerhalb beinhaltet, verwendet. Die Lösung enthält daher Gauss-Koeffizienten für die inneren und äußeren Quellen bezüglich der Planetenoberfläche. Gauss (1839) schätzte die Koeffizienten aus Magnetfeldmessungen von Bodenstationen ab. Dabei wurde festgestellt, dass nahe der Erdoberfläche mehr als 95% des Magnetfeldes von Quellen aus dem Inneren der Erde herrühren.

Die sphärisch-harmonische Analyse ist ein mathematisch motiviertes Verfahren und benötigt keine Kenntnis über den physikalischen Ursprung der Quellen. Eine Lokalisierung der Quellen innerhalb des Planeten ist dabei nicht möglich. Die Trennung zwischen internen und externen Quellen mit der sphärisch-harmonischen Analyse benötigt eine gute Abdeckung experimentell bestimmter Magnetfelddaten in einer geschlossenen Fläche nahe der Planetenoberfläche. Weiterhin können dabei zeitliche Variationen, insbesondere durch elektromagnetische Induktion, nur dann aufgelöst werden, wenn diese Datenabdeckung auch zeitaufgelöst zur Verfügung steht.

Bei der Erde gibt es im Vergleich zu anderen Planeten viele Messungen des Magnetfeldes nahe der Planetenoberfläche. Weiterhin ist die elektromagnetische Induktion im Planeteninneren vernachlässigbar. Somit lässt sich eine Separation zwischen inneren und äußeren Quellen über die sphärisch-harmonische Analyse durchführen. Um Informationen über die Magnetfeldverteilung für andere Planeten als die Erde zu erhalten, können in-situ Beobachtungen des Magnetfeldes von Raumfahrzeugen genutzt werden. Allerdings kann ein Raumfahrzeug in der Regel weder eine Abdeckung mit hinreichender räumlich-zeitlicher Auflösung erreichen noch werden die Messungen in einem stromfreien Gebiet oder nahe an der Planetenoberfläche durchgeführt. Daher würde eine sphärisch-harmonische Analyse bei Daten von Raumfahrtmissionen zu schlechten Ergebnissen führen (siehe z. B. Olsen et al. 2010).

Man kann ein physikalisch motiviertes Modell nutzen, um für diesen Fall eine Trennung zwischen den inneren und äußeren Quellen des Magnetfeldes zu erhalten. Anders als bisher wird die Wechselwirkung zwischen dem Sonnenwind und dem planetaren Magnetfeld in dieser Arbeit nicht über ein empirisches Modell, sondern über ein zeitabhängiges MHD-Modell bestimmt. Die zeitabhängigen Sonnenwindbedingungen, das planetare Magnetfeld und Diffusionskoeffizienten des Plasmas sind Parameter des MHD-Modells. Mit festgelegten Werten für diese Parameter kann das Differenzialgleichungssystem der MHD gelöst und die zeitabhängige Wechselwirkung bestimmt werden. Um das planetare Magnetfeld zu schätzen, werden initiale Werte für die Parameter des Magnetfeldes angenommen und die Wechselwirkung berechnet. Die Ergebnisse lassen sich mit Raumfahrzeugdaten aus der Wechselwirkungsregion vergleichen. Die Abweichung zwischen Daten und Modelllösungen wird durch eine Kostenfunktion quantifiziert. Durch Variieren der planetaren Magnetfeldparameter wird die Kostenfunktion minimiert (siehe Abb. 1.5).

## 1.5 Magnetohydrodynamik

Die Wechselwirkung zwischen dem Sonnenwind und dem Magnetfeld eines Planeten wird in dieser Arbeit im Rahmen der MHD-Näherung betrachtet. Die MHD-Beschreibung eignet sich für die Berechnung der Wechselwirkung, falls die betrachteten Prozesse auf räumlichen Skalen, die viel größer als der Gyroradius sind und auf zeitlichen Skalen, die viel größer als die inverse Gyrofrequenz sind, stattfinden. Der Gyroradius  $r_G$  für ein Proton mit einer Geschwindigkeitskomponente  $v_B$  senkrecht zu einem Magnetfeld der Stärke  $B$  ist

$$r_G = \frac{m_P v_B}{e B}. \quad (1.21)$$



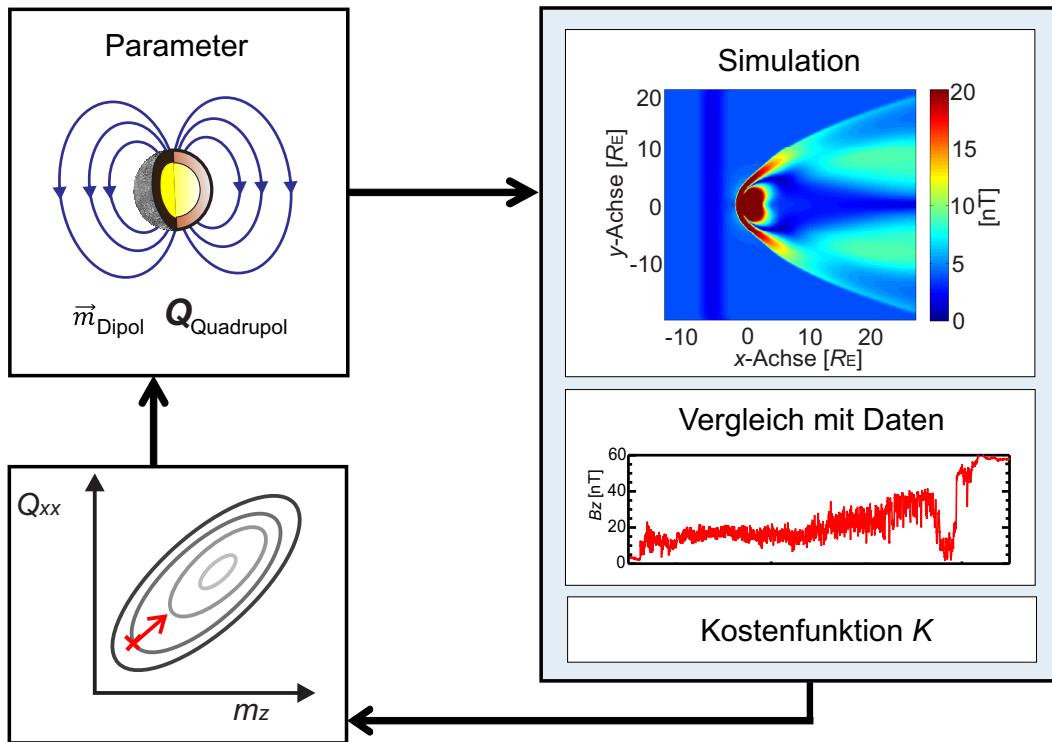


Abbildung 1.5: Schätzen der planetaren Magnetfeldparameter mithilfe eines MHD-Modells der Wechselwirkung des planetaren Magnetfeldes mit dem Sonnenwind. Die zu schätzenden Größen, hier die planetaren Dipol- und Quadrupolmomente (oben links), sind Parameter eines MHD-Modells, das die Wechselwirkung berechnet (oben rechts). Eine Kostenfunktion  $K$  quantifiziert die Abweichungen von Daten und Modelllösung. Die Dipol- und Quadrupolparameter werden so lange variiert (unten links), bis Daten und Modelllösung bestmöglich übereinstimmen, also die Kostenfunktion minimiert wurde.

Hier definiert  $e = 1.602176565 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  die Elementarladung und  $m_p = 1.67262178 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  die Protonenmasse. Die inverse Gyrofrequenz eines Protons ist

$$f_G^{-1} = \frac{2\pi m_p}{eB}. \quad (1.22)$$

Das Sonnenwindplasma besteht zum größten Teil aus Elektronen und Protonen. Dabei ist der Gyroradius und die inverse Gyrofrequenz für Elektronen stets kleiner als die der Protonen, weshalb für die Verwendung der MHD-Näherung die Skalen der Protonen maßgeblich sind.

Um die Gyroskalen abzuschätzen, wird die Wechselwirkung zwischen einem magnetfeldfreien Sonnenwind und dem planetaren Magnetfeld approximativ nach Chapman und Ferraro (1930) betrachtet. Dabei vernachlässigt man sowohl die Bugstoßwelle als auch die Umströmung in der Magnetosheath und die Magnetopause wird als eine planare Stromschicht angenommen. Der ungestörte Sonnenwind trifft auf die Magnetopause, wobei ein elektrischer Strom an der Magnetopause das Magnetfeld auf der sonnenwärtigen Seite zu Null macht, sodass sich das planetare Magnetfeld auf der anderen Seite verdoppelt. Dadurch erhöht sich der magnetische Druck hinter der Magnetopause, wobei dieser ma-

netisch Druck dem dynamischen Druck des Sonnenwindes gleicht. In einer Teilchenbetrachtung in diesem Modell erreichen die Protonen und Elektronen des Sonnenwindes ungestört die Magnetopause und werden dort reflektiert, indem sie eine halbe Gyration vollführen. Der elektrische Strom an der Magnetopause ist mit den unterschiedlichen Richtungen der Gyrationen von Elektronen und Protonen verknüpft. Der Gyroradius sowie die damit zusammenhängende inverse Gyrofrequenz wird im Folgenden für Erde und Merkur abgeschätzt.

Der subsolare Magnetopausenabstand befindet sich im Mittel etwa  $10 R_E$  von der Erde entfernt, wobei die Stärke des Erdmagnetfeldes dort ungefähr 30 nT beträgt. Wird die typische Sonnenwindgeschwindigkeit von 430 km/s (siehe Tab. 1.1) betrachtet, ergibt sich  $r_G \approx 75$  km und  $f_G^{-1} \approx 0.25$  s. Dieser Gyroradius ist viel kleiner als typische Skalen der Wechselwirkungsregion, wie beispielsweise die subsolare Dicke der Magnetosheath mit  $3 R_E \approx 19000$  km.

Für Merkur lassen sich die Gyroskalen in analoger Weise abschätzen. Das planetare Magnetfeld ist nach Johnson et al. (2012) nahe der subsolaren Magnetopause bei Merkur etwa 60 nT. Mit einer mittleren Sonnenwindgeschwindigkeit von 430 km/s (siehe Tab. 1.1) als typische Geschwindigkeit ergibt sich  $r_G \approx 37.5$  km und  $f_G^{-1} \approx 0.5$  s. Verglichen mit einer mittleren subsolaren Dicke der Magnetosheath nach Winslow et al. (2013) von etwa  $0.5 R_M = 1220$  km ist der Gyroradius viel kleiner.

Insgesamt lässt sich bei der Erde und dem Merkur die MHD-Näherung rechtfertigen. In dieser Betrachtung wurden die Effekte schwerer Ionen, zum Beispiel aus der Atmosphäre des Planeten, nicht betrachtet. Diese schwereren Ionen können einen wesentlich größeren Gyroradius haben, sodass diese über ein Modell außerhalb der MHD-Näherung zu berücksichtigen sind. Weiterhin beschränkt die inverse Gyrofrequenz die zeitlichen Änderungen in einem MHD-Modell.

Eine detaillierte Darstellung der MHD-Theorie kann zum Beispiel bei Goedbloed und Poedts (2004) oder bei Bellan (2008) gefunden werden. Im Folgenden sind die für diese Arbeit relevanten Grundlagen dargestellt. Die MHD beschreibt das Plasma als eine magnetisierbare Flüssigkeit, wobei über die Elektronen und Ionen gemittelte Größen betrachtet werden. Die zur MHD-Beschreibung zugehörigen Gleichungen geben die Lösung für die mittlere Massendichte  $\rho$ , die mittlere Geschwindigkeit  $\vec{v}$ , den als isotrop angenommenen Druck  $p$ , den Magnetfeldvektor  $\vec{B}$  sowie den Vektor des elektrischen Feldes  $\vec{E}$  bezüglich der kartesischen Koordinaten des Raumes  $(x, y, z)$  und der Zeit  $(t)$  an und lauten

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (1.23)$$

$$\partial_t (\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) + \nabla p - \vec{j} \times \vec{B} = 0, \quad (1.24)$$

$$\partial_t \left( \frac{\rho}{2} \vec{v}^2 + \epsilon \right) + \nabla \cdot \left( \frac{\rho}{2} \vec{v}^2 \vec{v} \right) + \nabla \cdot (\epsilon \vec{v}) + \nabla \cdot (p \vec{v}) + \nabla \cdot \vec{q}_w = \vec{j} \cdot \vec{E}, \quad (1.25)$$

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0, \quad (1.26)$$

$$\partial_t \vec{B} + \nabla \times \vec{E} = 0, \quad (1.27)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \vec{j} = 0, \quad (1.28)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.29)$$

Hierbei ist  $\vec{j}$  die elektrische Stromdichte,  $\epsilon$  die innere Energiedichte,  $\vec{q}_w$  der Wärmestrom und  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$  die Vakuumpermeabilität. Dabei steht die innere Energiedichte mit dem Druck über  $\epsilon = p/(\gamma - 1)$  in Beziehung, wobei  $\gamma$  den Isentropenexponenten bezeichnet. Der Nabla-Operator  $\nabla$  ist definiert durch  $\nabla := (\partial_x, \partial_y, \partial_z)^T$  und der Operator  $\circ$  bildet das dyadische Produkt der Vektoren links und rechts. Die Massendichte  $\rho$  hängt mit der mittleren Teilchendichte der Ionen  $N$  über  $\rho = m_p N$  zusammen. Der Gasdruck  $p$  hängt über die ideale Gasgleichung  $p = N k_B T$  mit der Teilchendichte und der Temperatur  $T$  zusammen, wobei  $k_B = 1.3806488 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$  die Boltzmann-Konstante ist. Gleichung (1.23) ist die Kontinuitätsgleichung, Gleichung (1.24) die Impulsbilanz, Gleichung (1.25) die Energiebilanz und Gleichung (1.26) beschreibt das konvektive elektrische Feld. Die letzten drei Gleichungen der MHD-Beschreibung (1.27)–(1.29) sind Teil der Maxwell-Gleichungen, wobei der Verschiebungsstrom vernachlässigt wurde.

Häufig kann der Wärmestrom  $\vec{q}_w$  vernachlässigt werden. Dies vereinfacht die Energiebilanz (1.25) zu

$$\partial_t p + (\vec{v} \cdot \nabla) p + \gamma p \nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (1.30)$$

Die Impulsbilanz (1.24) lässt sich mithilfe der Kontinuitätsgleichung (1.23) auch wie folgt darstellen:

$$\rho \partial_t \vec{v} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p - \vec{j} \times \vec{B} = 0. \quad (1.31)$$

Dabei kann der Term der elektromagnetischen Kopplung  $\vec{j} \times \vec{B}$  mit den Maxwell-Gleichungen (1.27)–(1.29) ausgeschrieben werden:

$$\vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \frac{1}{2\mu_0} \nabla B^2. \quad (1.32)$$

Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt die magnetische Spannung, der zweite Term den Gradienten des magnetischen Drucks.

Die Gleichung (1.26) lässt sich mit dem Faradayschen Gesetz (1.27) umschreiben zu

$$\partial_t \vec{B} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (1.33)$$

Diese Gleichung wird auch als Theorem des eingefrorenen Flusses bezeichnet und beschreibt die Kopplung des Magnetfeldes an das Plasma. Das Theorem gilt allerdings nur unter der Annahme einer unendlich hohen elektrischen Leitfähigkeit im Plasma. Sobald eine endliche elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  und damit eine endliche Resistivität  $\eta = 1/\sigma$  im Plasma vorhanden ist, muss Gleichung (1.26) modifiziert werden:

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j}. \quad (1.34)$$

Zusammen mit dem Faradayschen Gesetz (1.27) folgt damit die Induktionsgleichung der MHD:

$$\partial_t \vec{B} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \vec{N}_R, \quad (1.35)$$

wobei  $\vec{N}_R$  eine Abkürzung für den resistiven Quellterm

$$\vec{N}_R := \nabla \times \left( \frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} \right) \quad (1.36)$$

ist.

Das Gleichungssystem der idealen MHD besteht aus den Gleichungen (1.23), (1.30), (1.31) mit den Ersetzungen (1.32), und (1.33). Diese Gleichungen bilden ein partielles Differenzialgleichungssystem von 8 Gleichungen für die 8 Unbekannten  $\rho$ ,  $\vec{v}$ ,  $p$  und  $\vec{B}$ . Die Lösung lässt sich kompakt im Vektor  $\vec{u}$  zusammenfassen, der definiert ist durch

$$\vec{u} := (\rho, v_x, v_y, v_z, p, B_x, B_y, B_z)^T. \quad (1.37)$$

Wird anstatt Gleichung (1.33) die Induktionsgleichung (1.35) verwendet, bilden die Gleichungen das System der resistiven MHD. Die MHD-Beschreibung fasst die Bewegung der Elektronen und Ionen zu einem quasineutralen Fluid zusammen, mit Ausnahme bei der Entstehung elektrischer Ströme. Allerdings ist das Verhalten von Ionen und Elektronen nahe der Gyroskala völlig unterschiedlich. Um der Entkopplung von der Elektronen- und Ionenbewegung dort Rechnung zu tragen, lässt sich die MHD-Beschreibung um einen Hall-Term  $\vec{N}_H$  erweitern:

$$\vec{N}_H := \nabla \times \left( \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{\frac{e}{m_p} \rho} \right), \quad (1.38)$$

Dieser Term (1.38) ergänzt die Induktionsgleichung (1.35) zu

$$\partial_t \vec{B} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \vec{N}_R - \vec{N}_H. \quad (1.39)$$

Diese Form der Induktionsgleichung wird in der Hall-MHD verwendet, in der das Magnetfeld nur noch in das Fluid der Elektronen eingefroren ist, jedoch nicht mehr in das der Protonen. Die verschiedenen Erweiterungen der idealen MHD zur resistiven MHD oder Hall-MHD lassen sich auch verallgemeinert darstellen. Dazu wird das Theorem des eingefrorenen Flusses ausgedrückt durch

$$\partial_t \vec{B} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \vec{N}. \quad (1.40)$$

Der allgemeine Quellterm  $\vec{N}$  verletzt Bedingungen der idealen MHD und lässt sich auf verschiedene physikalische Prozesse zurückführen. Alle Spielarten der MHD für  $\vec{N} \neq 0$  werden auch als nicht-ideale MHD bezeichnet.

Bei einer antiparallelen Magnetfeldkonfiguration kann im Rahmen der nicht-idealen MHD magnetische Rekonnexion auftreten. Dabei wird magnetische in kinetische Energie umgewandelt, wobei das Plasma stark beschleunigt wird. Ein erstes theoretisches Verständnis von magnetischer Rekonnexion wurde von Sweet (1958) und Parker (1957) gegeben, was auf das Sweet-Parker-Modell führte. Dabei betrachteten Sweet und Parker eine zweidimensionale Geometrie mit einem von beiden Seiten entlang der  $x$ -Richtung einströmenden Plasma mit antiparallelem Magnetfeld (siehe Abb. 1.6). Der Rekonnexionsprozess wird in einem Bereich mit homogener Resistivität  $\eta$ , der Diffusionsregion, betrachtet. Über diesen Bereich werden die resistiven MHD-Gleichungen integriert. Daraus ergeben sich einige wichtige Relationen zwischen Einström- und Ausströmbedingungen. Im Sweet-Parker-Modell hat die Diffusionsregion eine Breite von  $2 d_{SP}$  entlang der  $x$ -Achse und eine Länge von  $2 L_{SP}$  entlang der  $z$ -Achse. Das Modell nimmt das Plasma als inkompressibel und stationär an, was die Kontinuitätsgleichung (1.23) vereinfacht:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (1.41)$$

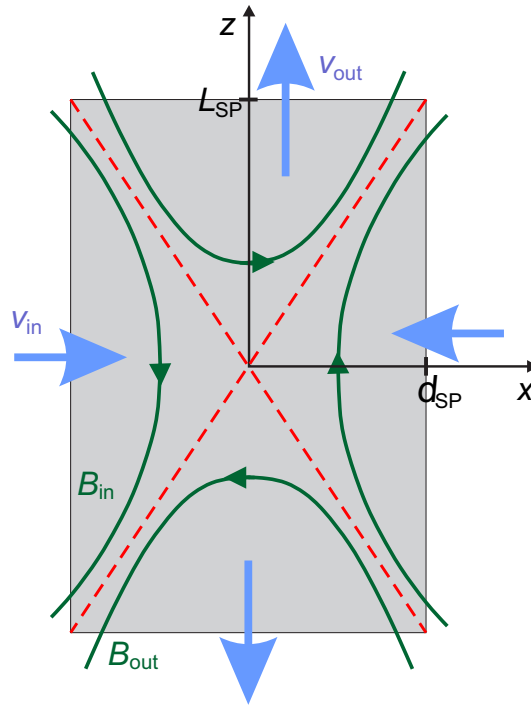


Abbildung 1.6: Skizze der symmetrischen Sweet-Parker-Geometrie. Das Plasma strömt von beiden Seiten, mit entgegengesetzt gerichteten Magnetfeld, entlang der  $x$ -Richtung in die Rekonnexionsregion. Der X-Punkt der Rekonnexion ist im Zentrum, wo sich das Magnetfeld durch die Überlagerung auslöscht. Das Plasma strömt entlang der  $z$ -Richtung aus der Rekonnexionsregion.

Die Integration über die Diffusionsregion ergibt dann

$$\frac{v_{\text{in}}}{d_{\text{SP}}} = \frac{v_{\text{out}}}{L_{\text{SP}}}, \quad (1.42)$$

wobei  $v_{\text{in}}$  die Einstömgeschwindigkeit bei  $x = -d_{\text{SP}}$  und  $v_{\text{out}}$  die Ausströmgeschwindigkeit bei  $z = L_{\text{SP}}$  bezeichnet, wie in Abbildung 1.6 skizziert. Die Integration über die Diffusionsregion ist identisch zu einer Finiten-Differenzen-Näherung mit

$$\partial_x v_x = -\frac{v_{\text{in}}}{d_{\text{SP}}}, \quad (1.43)$$

und

$$\partial_z v_z = \frac{v_{\text{out}}}{L_{\text{SP}}}. \quad (1.44)$$

Für Gleichung (1.35) ergibt sich aus einer Finiten-Differenzen-Näherung

$$v_{\text{in}} = \frac{\eta}{\mu_0 d_{\text{SP}}}. \quad (1.45)$$

Gemäß dieser Gleichung ist die Einstömgeschwindigkeit in die Rekonnexionsregion  $v_{\text{in}}$  durch die Resistivität und die Breite der Diffusionsregion festgelegt.

Im magnetfeldfreien Fall reduzieren sich die MHD-Gleichungen zu den Gleichungen der Hydrodynamik. Die Lösung der hydrodynamischen Gleichungen für kleinamplitudige Störungen führt auf die Ausbreitung von Schallwellen. Analog dazu hatte Alfvén (1942) erstmalig auch die Wellenausbreitung in MHD-Plasmen untersucht. Dabei sind Bewegungen des Plasmas an ein eventuell vorhandenes Hintergrundmagnetfeld  $\vec{B}_0$  über das Theorem des eingefrorenen Flusses (1.33) gekoppelt. Zunächst wird ein ruhendes Plasma mit einem Hintergrundmagnetfeld  $B_0$  in  $z$ -Richtung betrachtet. Werden die MHD-Gleichungen linearisiert und setzt man für die räumlichen und zeitlichen Variationen eine ebene Welle der Form  $\exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}))$  mit der Kreisfrequenz  $\omega$  und dem Wellenvektor  $\vec{k}$  an, ergeben sich verschiedene Dispersionsrelationen. Eine Lösung ist die nach Hannes Alfvén benannte Alfvén-Welle mit der Dispersionsrelation

$$\frac{\omega}{k} = v_A \cos(\theta_B), \quad (1.46)$$

mit dem Betrag des Wellenvektors  $k = |\vec{k}|$  und dem Winkel  $\theta_B$  zwischen dem Wellenvektor  $\vec{k}$  und dem Hintergrundmagnetfeld  $\vec{B}_0$ . Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle  $v_A$  ist die Alfvén-Geschwindigkeit

$$v_A = \frac{|\vec{B}_0|}{\sqrt{\mu_0 \rho}}. \quad (1.47)$$

Eine weitere Klasse von Wellenlösungen sind die magnetosonischen Moden, die folgende Dispersionsrelation erfüllen:

$$\frac{\omega}{k} = \left( \frac{1}{2}(v_A^2 + c_S^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(v_A^2 + c_S^2)^2 - 4 c_S^2 v_A^2 \cos^2(\theta_B)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.48)$$

wobei die Schallgeschwindigkeit  $c_S$  durch

$$c_S := \sqrt{\partial_\rho p} \quad (1.49)$$

bei konstanter Entropie definiert ist. Die Dispersionsrelation (1.48), die zur Summation bei  $\pm$  gehört, beschreibt die schnelle magnetosonische Mode und die zur Differenz beschreibt die langsame magnetosonische Mode. Eine Ausbreitung senkrecht zum Hintergrundmagnetfeld, also für  $\theta_B = \pi/2$ , ist für die Alfvén-Welle nicht möglich. Für die magnetosonische Mode aus Gleichung (1.48) ergibt sich in diesem Fall eine charakteristische Ausbreitungsgeschwindigkeit, die magnetosonische Geschwindigkeit, von

$$v_{MS} := \sqrt{c_S^2 + v_A^2}. \quad (1.50)$$

Das Verhältnis zwischen der Geschwindigkeit des Plasmas und der magnetosonischen Geschwindigkeit definiert die magnetosonische Machzahl:

$$M_{MS} := \frac{v}{v_{MS}}. \quad (1.51)$$

Für den Grenzfall eines magnetfeldfreien Plasmas geht die magnetosonische Machzahl in die sonische Machzahl

$$M_S := \frac{v}{c_S} \quad (1.52)$$

über, weil die Alfvén-Geschwindigkeit in diesem Fall zu Null wird.

Werden die kleinamplitudigen Störungen bei Wellen größer, kommen nichtlineare Effekte zum Tragen. Die Wellen können sich aufsteilen, wodurch Stoßwellen entstehen können. Analog zu Stoßwellen supersonischer Fluide (siehe z. B. Landau und Lifshits 1959), lassen sich Sprungbedingungen für die hier betrachteten physikalischen Größen in MHD-Plasmen berechnen. Diese Sprungbedingungen, auch Rankine-Hugoniot-Bedingungen genannt, werden dabei durch eine Integration über die Grenzschicht aus den MHD-Gleichungen hergeleitet. Die resultierenden Bedingungen sind (siehe z. B. Petrinec und Russell 1997):

$$[\rho v_\xi] = 0, \quad (1.53)$$

$$[B_\xi] = 0, \quad (1.54)$$

$$\left[ \rho v_\xi^2 + p + \frac{\vec{B}_\tau^2}{2\mu_0} \right] = 0, \quad (1.55)$$

$$\left[ \rho v_\xi \vec{v}_\tau - \frac{B_\xi}{\mu_0} \vec{B}_\tau \right] = 0, \quad (1.56)$$

$$[v_\xi \vec{B}_\tau - \vec{v}_\tau B_\xi] = 0, \quad (1.57)$$

$$\left[ \left( \frac{\rho}{2} \vec{v}^2 + \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) p + \frac{\vec{B}_\tau^2}{\mu_0} \right) v_\xi - \frac{B_\xi}{\mu_0} \vec{B}_\tau \cdot \vec{v}_\tau \right] = 0. \quad (1.58)$$

Die eckigen Klammern bedeuten  $[X] := X_1 - X_2$ , wobei  $X_1$  die Größe  $X$  auf der einen Seite und  $X_2$  die Größe  $X$  auf der anderen Seite der Grenzschicht ist. Der tiefgestellte Index  $\xi$  bezeichnet die Normalkomponente eines Vektors bezüglich der Grenzfläche und der Index  $\tau$  einen Vektor mit zwei linear unabhängige Tangentialkomponenten.





## 2 MHD-Simulationscode<sup>1</sup>

In dieser Arbeit wird die Wechselwirkung des Sonnenwindes mit einem planetaren Magnetfeld durch ein MHD-Modell unter Berücksichtigung der zeitabhängigen Sonnenwindbedingungen beschrieben. Ein Vorteil des MHD-Modells gegenüber empirischen Modellen ist die geringere Zahl anzunehmender Modellannahmen. Anhand von Abweichungen zwischen Raumfahrzeugdaten und im Rahmen des MHD-Modells simulierten Daten entlang des gesamten Raumfahrzeugorbits lässt sich die Modellqualität beurteilen.

Die dem Modell zugrunde liegenden MHD-Gleichungen bilden ein System aus gekoppelten partiellen Differenzialgleichungen. Um diese Gleichungen vollständig für das Wechselwirkungsproblem zu lösen, ist es nötig, sie numerisch zu berechnen. Dazu wird der bei Ogino (1993) beschriebene Simulationscode verwendet und modifiziert beziehungsweise erweitert. Im Vergleich zu anderen Simulationscodes wie dem BATS-R-US (Block Adaptive-Tree Solar-wind Roe-type Upwind Scheme) Code (Powell et al. 1999), ist dieser Simulationscode vergleichsweise einfach aufgebaut. Beispielsweise verzichtet der Simulationscode auf die Implementierung einer adaptiven Gitterverfeinerung (englisch: adaptive mesh refinement). Dies vereinfacht die Konstruktion eines adjungierten Simulationscodes, wie sie im nächsten Kapitel vorgestellt wird. Das numerische Schema des Codes wurde bereits in verschiedenen Studien genutzt und getestet, weshalb dieses ausreichend validiert ist. Beispielsweise konnte man mithilfe des Codes die magnetosphärische Konvektion in Abhängigkeit des Sonnenwindmagnetfeldes (Ogino et al. 1985) oder auch feldparallelen Ströme in der Erdmagnetosphäre (Ogino 1986) untersuchen. Für die hier benötigten Simulationen werden das numerische Schema und die äußeren Randbedingungen übernommen. Innere Randbedingungen, eine komplexere planetare Magnetfeldgeometrie sowie das Einlesen und Verarbeiten von gemessenen Raumfahrzeugdaten sind noch zu ergänzen.

Der so entstehende Simulationscode löst die MHD-Gleichungen in einer den Planeten umschließenden Simulationsbox (siehe Abb. 2.1). Für die Simulation wird das MSP- (Model-Solar wind-Planet-)Koordinatensystem eingeführt, bei dem sich der Planet im Ursprung des Koordinatensystems befindet. Dabei ist die  $x$ -Achse entlang der Sonnenwindströmung, die  $z$ -Achse parallel zur Rotationsachse orientiert und die  $y$ -Achse vervollständigt ein rechtshändiges Orthogonalsystem. Der Sonnenwind strömt parallel zur  $x$ -Richtung in das Simulationsgebiet ein. Die Ausdehnung des Simulationsgebietes in  $x$ -Richtung wird mit  $x_L$ , in  $y$ -Richtung mit  $y_L$  und in  $z$ -Richtung mit  $z_L$  bezeichnet.

---

<sup>1</sup>Eine verkürzte Darstellung der Inhalte dieses Kapitels findet sich bei Nabert et al. (2016b).

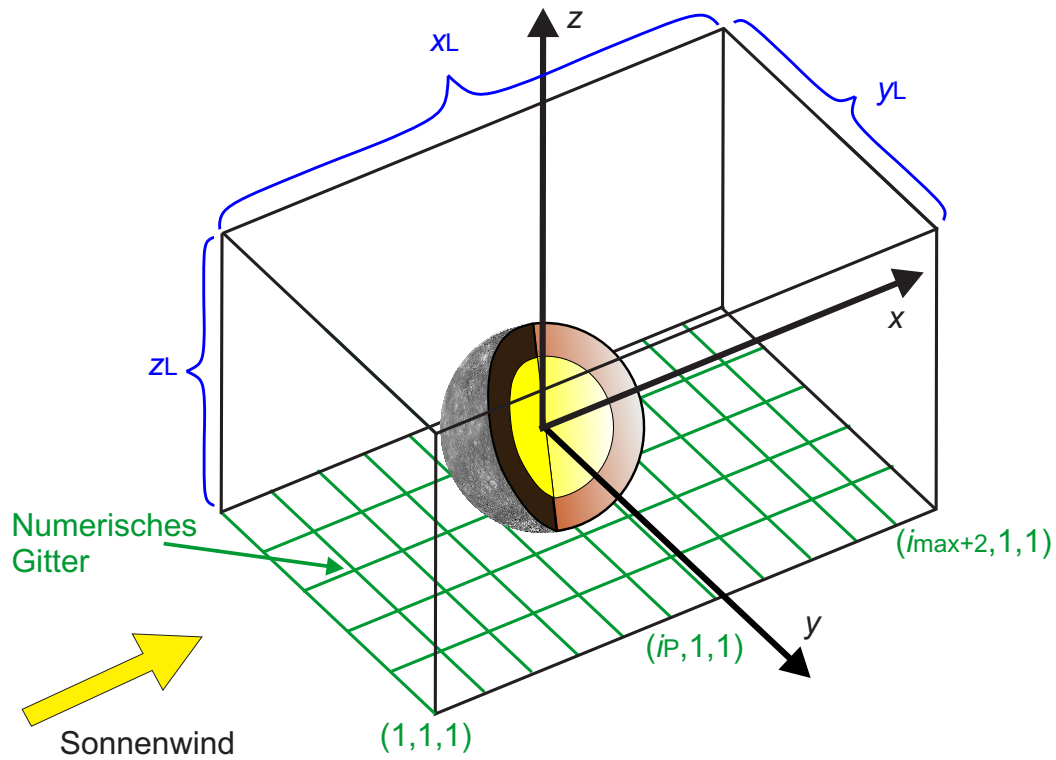


Abbildung 2.1: Das betrachtete Simulationsgebiet, welches den Planeten umschließt (nach Nabert et al. 2016b). Das Koordinatensystem ist im Ursprung des Planeten fixiert und die  $x$ -Achse ist parallel zur Einströmrichtung des Sonnenwinds.

## 2.1 Lax-Wendroff-Schema

Der MHD-Simulationscode von Ogino (1993) benutzt ein Lax-Wendroff-Schema (Lax und Wendroff 1960), um die in Kapitel 1.5 vorgestellten MHD-Gleichungen zu lösen. Dieses Schema lässt sich auf hyperbolische Differenzialgleichungen anwenden und ist von zweiter Ordnung in Raum und Zeit. Der Simulationscode löst die MHD-Gleichungen (1.23), (1.28), (1.30), (1.31) und (1.35). Dazu werden die Kontinuitätsgleichung (1.23), die Impulsbilanz (1.31) und die Gleichung für den Druck (1.30) nach den Zeitableitungen von  $\rho$ ,  $\vec{v}$  und  $p$  umgestellt und um diffusive Terme, das heißt Terme mit einem Laplace-Operator  $\Delta = \nabla^2$ , erweitert:

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \vec{v}) + D_\rho \nabla^2 \rho, \quad (2.1)$$

$$\partial_t \vec{v} = -(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \frac{1}{\rho} (\nabla p - \vec{j} \times \vec{B}) + \frac{D_v}{\rho} \nabla^2 \vec{v}, \quad (2.2)$$

$$\partial_t p = -(\vec{v} \cdot \nabla) p - \gamma p \nabla \cdot \vec{v} + D_p \nabla^2 p. \quad (2.3)$$

Hierbei sind  $D_\rho$ ,  $D_v$  und  $D_p$  die Diffusionskoeffizienten der Dichte, der Geschwindigkeit beziehungsweise des Drucks. Die zugehörigen Terme in den Differenzialgleichungen wenden den Laplace-Operator auf die physikalische Größe an, zu der die Zeitableitung in der entsprechenden Differenzialgleichung berechnet wird. Diese Terme bewirken eine

Glättung der jeweiligen physikalischen Größen, wobei der zugehörige Diffusionskoeffizient die Stärke der Glättung bestimmt. Der Diffusionskoeffizient der Geschwindigkeit  $D_v$  wird auch als dynamische Viskosität bezeichnet. Das numerische Schema erfordert, ungeachtet der physikalischen Eigenschaften des Plasmas in der Wechselwirkung, stets endliche Werte für die Diffusionskoeffizienten, um numerische Instabilitäten zu dämpfen. Es werden die von Ogino (1993) vorgeschlagenen Werte für die in diesem Kapitel diskutierten Rechnungen verwendet. Das Magnetfeld wird durch Gleichung (1.35) berechnet, wobei die Resistivität  $\eta/\mu_0 = D_B$  die magnetische Diffusion beschreibt, sodass kein weiterer Term hinzuzufügen ist. Der Strom ist über das Ampèresche Gesetz (1.28) bestimmt. Ein planetares Magnetfeld besitzt keine Ströme im Außenraum des Planeten, wodurch die Berechnung der Rotation von  $\vec{B}_{\text{Planet}}$  keinen Beitrag zur elektrischen Stromdichte liefert. Bei der Berechnung der elektrischen Ströme über das Ampèreschen Gesetz wird das planetare Magnetfeld  $\vec{B}_{\text{Planet}}$  vom gesamten Magnetfeld abgezogen:

$$\vec{j} = \nabla \times (\vec{B} - \vec{B}_{\text{Planet}}). \quad (2.4)$$

Dadurch verkleinert sich der numerische Fehler, da die Ableitungen und Differenzen der Rotation im Ampèreschen Gesetz nun auf kleinere Werte angewandt werden.

Die physikalischen Größen werden nach Ogino (1993) auf typische Werte nahe der Planetenoberfläche normiert. Für Simulationen der Sonnenwindwechselwirkung mit der Erde wird die Massendichte  $\rho$  auf  $\rho_{\text{norm}} = 10^4 m_p / \text{cm}^3$ , die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  auf  $v_{\text{norm}} = 6.8 \cdot 10^3 \text{ km/s}$ , der Druck  $p$  auf  $p_{\text{norm}} = 7.7 \cdot 10^{-4} \text{ Pa}$ , das Magnetfeld  $\vec{B}$  auf  $B_{\text{norm}} = 3.12 \cdot 10^{-5} \text{ T}$  und die Ortskoordinaten mit  $R_E = 6371 \text{ km}$  normiert. Die magnetische Diffusion  $D_B$  ist mit  $4.3 \cdot 10^{13} \text{ m}^2/\text{s}$  normiert und damit ergibt sich die Normierung der Resistivität  $\eta$  zu  $\eta_{\text{norm}} = 5.4 \cdot 10^7 \text{ m}^2\text{N/A}^2 \text{ s}$ . Die dynamische Viskosität  $D_v$  wird mit  $v_{\text{norm}} = 3.26 \cdot 10^{14} \text{ kg/m s}$  normiert. Die Zeit ist dann mit  $t_{\text{norm}} = 0.937 \text{ s}$  und die Teilchendichte  $N$  auf  $N_{\text{norm}} = 10^4 / \text{cm}^3$  normiert.

Das numerische Lösen der MHD-Gleichungen mit dem Lax-Wendroff-Schema, einer Finite-Differenzen-Methode, erfordert die Darstellung der Lösung auf einem diskreten Gitter. Die Diskretisierung der Raumkoordinaten  $(x, y, z)$  wird verknüpft mit den Indizes  $(i, j, k)$ , wobei  $i$  für  $x$ ,  $j$  für  $y$  und  $k$  für  $z$  steht. Dabei ist  $i = 1, \dots, i_{\text{max}} + 2$ ,  $j = 1, \dots, j_{\text{max}} + 2$  und  $k = 1, \dots, k_{\text{max}} + 2$ . Die Anzahl der Gitterpunkte des Raumes  $N_{\text{Gitter}}$  berechnet sich über

$$N_{\text{Gitter}} = (i_{\text{max}} + 2) \cdot (j_{\text{max}} + 2) \cdot (k_{\text{max}} + 2). \quad (2.5)$$

Die Ränder der Simulationsbox in  $x$ -Richtung befinden sich bei  $(i = 1, j, k)$  und  $(i = i_{\text{max}} + 1, j, k)$ . In  $y$ -Richtung sind Ränder bei  $(i, j = 1, k)$  sowie  $(i, j = j_{\text{max}} + 2, k)$  und in  $z$ -Richtung bei  $(i, j, k = 1)$  sowie  $(i, j, k_{\text{max}} + 2)$ . Der Abstand zwischen einzelnen Gitterpunkten ist in  $x$ -Richtung  $\Delta x = x_L / (i_{\text{max}} + 1)$ , in  $y$ -Richtung  $\Delta y = y_L / (j_{\text{max}} + 2)$  und in  $z$ -Richtung  $\Delta z = z_L / (k_{\text{max}} + 1)$ . In dem Gitter befindet sich der Planet bei  $(i_p, j_p, k_p)$ , mit  $j_p = (j_{\text{max}} + 1)/2$  und  $k_p = (k_{\text{max}} + 1)/2$ . Die Position des Planeten in  $x$ -Richtung bleibt frei wählbar und es lässt sich eine verschobene Position über  $i_p^* := (i_{\text{max}} + 2)/2 - i_p$  definieren. Die Umrechnung zwischen einer Position  $(x, y, z)$  im Raum und dem zugehörigen Gitterpunkt  $(i, j, k)$  kann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} x &= 0.5 \Delta x (2 i - i_{\text{max}} - 3 + 2 i_p^*), \\ y &= 0.5 \Delta y (2 j - j_{\text{max}} - 3), \\ z &= 0.5 \Delta z (2 k - k_{\text{max}} - 3). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Die Zeit  $t$  ist diskretisiert mit dem Index  $l$  von  $l = 0, \dots, l_{\max}$ , wobei  $l = 0$  dem Startzeitpunkt der Simulation  $t = 0$  entspricht und  $l_{\max}$  dem Endzeitpunkt  $t = t_E$ . Damit ergibt sich ein Zeitschritt von  $\Delta t = t_E / l_{\max}$ . Die Lösung der MHD-Gleichungen  $\vec{u}(t, x, y, z)$ , definiert in Gleichung (1.37), kann auf dem diskreten Gitter dargestellt werden durch  $u_{l,i,j,k}^n$ , mit  $n = 1, \dots, N_{\text{var}}$ , der Komponente des Vektors  $\vec{u}$ . Es werden acht MHD-Größen betrachtet, sodass  $N_{\text{var}} = 8$  gilt.

Die Anwendung des Lax-Wendroff-Schemas auf die MHD-Gleichungen ist im Folgenden kurz erläutert. Um die Darstellung zu vereinfachen, wird sich in diesem Abschnitt auf die Raumdimension  $x$  und eine partielle Differenzialgleichung der Form

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

beschränkt. Auf die MHD-Gleichungen bezogen ist  $u(x, t)$  eine Komponente aus dem Vektor  $\vec{u}$  und  $f(u(x, t))$  eine Funktion der MHD-Variablen. Die Lösung  $u(x, t)$  kann auf einem kartesischen Gitter bezüglich des Raumes ( $x \rightarrow i \Delta x$ ) und der Zeit ( $t \rightarrow l \Delta t$ ) diskretisiert werden. Dann ergeben sich diskretisierte Größen der Form  $u_{l,i}$ , mit dem Zeitindex  $l$  und dem Raumindex  $i$ . Zunächst werden rechtsseitige Mittelwerte von  $u_{l,i}$  berechnet:

$$u_{l,i+1/2} = \frac{1}{2} (u_{l,i+1} + u_{l,i}). \quad (2.8)$$

Dabei deutet der Index  $i + 1/2$  an, dass sich die Werte als eine Interpolation auf Zwischengitterplätzen interpretieren lassen. Anschließend wird ein halber Zeitschritt aus den rechtsgemittelten Werten über die Differenzialgleichung (2.7) bestimmt:

$$u_{l+1/2,i+1/2} = u_{l,i+1/2} - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (f(u_{l,i+1}) - f(u_{l,i})). \quad (2.9)$$

Ähnliches ist in einem weiteren Schritt mit linksseitigen Mittelwerten durchzuführen. Die linksseitigen Mittelwerte lauten

$$u_{l,i-1/2} = \frac{1}{2} (u_{l,i} + u_{l,i-1}). \quad (2.10)$$

Wie zuvor wird daraus ein halber Zeitschritt ermittelt:

$$u_{l+1/2,i-1/2} = u_{l,i-1/2} - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (f(u_{l,i}^n) - f(u_{l,i-1}^n)). \quad (2.11)$$

Der vollständige Zeitschritt ergibt sich durch das Zusammenführen der halben Zeitschritte über

$$u_{l+1,i} = u_{l,i} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(u_{l+1/2,i+1/2}) - f(u_{l+1/2,i-1/2})). \quad (2.12)$$

Die Berücksichtigung aller drei Raumdimensionen und die Anwendung des Lax-Wendroff-Schemas auf die Kontinuitätsgleichung (1.23) kann in Ogino (1993) gefunden werden.

Der Zeitschritt  $\Delta t$  im hier betrachteten numerischen Schema ist, anders als bei impliziten Lösungsverfahren, durch das Courant-Friedrichs-Lewy Kriterium (Courant et al. 1928) beschränkt:

$$\frac{v_x \Delta t}{\Delta x} + \frac{v_y \Delta t}{\Delta y} + \frac{v_z \Delta t}{\Delta z} \leq 1. \quad (2.13)$$

Für eine Dimension  $x$  folgt  $\Delta t \leq \Delta x / v_x$  oder auch  $v_x \leq \Delta x / \Delta t$  daraus. Daher muss die maximal auftretende Geschwindigkeit  $v_x$  im Simulationsgebiet kleiner sein als die numerische Geschwindigkeit  $\Delta x / \Delta t$ , mit der neue Zeitschritte berechnet werden. Dies stellt ein notwendiges, aber kein hinreichendes Kriterium für eine stabile Simulation dar.

## 2.2 Rand- und Anfangsbedingungen

Zum Lösen der MHD-Gleichungen sind Randbedingungen an den Seitenflächen des Simulationsgebietes zu bestimmen. Zunächst werden die Randbedingungen bei  $(i = 1, j, k)$  betrachtet. Dort soll der Sonnenwind in das Simulationsgebiet einströmen, weshalb diese Randbedingungen auch als Einströmrandbedingungen (englisch: inflow boundary conditions) bezeichnet werden. Im Allgemeinen kann man die physikalischen Größen an den Gitterzellen bei  $(i = 1, j, k)$  in jedem Zeitschritt auf die Werte der Sonnenwindbedingungen setzen. Die Sonnenwindbedingungen lassen sich in dem Vektor

$$\vec{u}_{\text{SW}}(t) := (\rho_{\text{SW}}(t), v_{\text{SW}}(t), 0, 0, p_{\text{SW}}(t), B_{x,\text{SW}}(t), B_{y,\text{SW}}(t), B_{z,\text{SW}}(t))^T \quad (2.14)$$

zusammenfassen. Alternativ kann anstatt der Massendichte auch die Teilchendichte der Ionen im Sonnenwind  $N_{\text{SW}} = \rho_{\text{SW}}/m_{\text{P}}$  verwendet werden. Zeitdiskret lässt sich der Sonnenwindvektor darstellen als  $\vec{u}_{\text{SW},l} := \vec{u}_{\text{SW}}(l \Delta t)$ , mit dem Zeitindex  $l$ . Im Vergleich zu dem Simulationscode aus Ogino (1993), werden hier die Magnetfeldkomponenten des Sonnenwindes in  $x$ - und  $y$ -Richtung und zeitliche Variationen des Sonnenwindes ebenfalls berücksichtigt.

Um die numerische Stabilität zu erhöhen, werden nach Ogino (1993) die Sonnenwindbedingungen nicht nur in die Gitterzellen mit  $i = 1$ , sondern anteilig auch in die mit  $i > 1$  gesetzt. Dazu ist nach jedem Zeitschritt für alle  $(i, j, k)$  die folgende Ersetzung durchzuführen:

$$u_{l,i,j,k}^n \leftarrow (1 - \kappa_c) u_{l,i,j,k}^n + \kappa_c u_{\text{SW},l}^n. \quad (2.15)$$

Dabei ist  $\kappa_c$  über  $\kappa_c^*$  gegeben durch

$$\kappa_c^* = 1 - \frac{10(i-1)}{i_{\text{max}} - 2i_{\text{P}} + 1}, \quad (2.16)$$

mit

$$\kappa_c = \begin{cases} 0, & \kappa_c^* < 0 \\ \kappa_c^{*2}, & 0 \leq \kappa_c^* \leq 1 \\ 1, & \kappa_c^* > 1 \end{cases}. \quad (2.17)$$

Dadurch werden die Sonnenwindbedingungen anteilig in die Gitterzellen hinzugefügt, wobei der Anteil umso kleiner ist, je weiter sich ein Punkt weg vom Einströmrand befindet. Am Einströmrand bei  $i = 1$  ist  $\kappa_c = 1$  und die Sonnenwindbedingungen werden dort gesetzt. Für  $i \geq (i_{\text{max}} - 2i_{\text{P}} + 11)/10$  tragen die Sonnenwindbedingungen nicht mehr bei, da  $\kappa_c = 0$  ist.

An den anderen Außenrändern des Simulationsgebietes bei  $(i = i_{\text{max}} + 2, j, k)$ ,  $(i, j = 1, k)$ ,  $(i, j = j_{\text{max}} + 2, k)$ ,  $(i, j, k = 1)$  und  $(i, j, k = k_{\text{max}} + 2)$  werden Ausströmrandbedingungen (englisch: outflow boundary conditions) verwendet. Dabei sind die Ableitungen der physikalischen Größen senkrecht zur Randebene Null. An der Ebene senkrecht zur  $x$ -Achse ergibt sich somit  $\partial_x \vec{u} = 0$ , an den Ebenen senkrecht zur  $y$ -Achse gilt  $\partial_y \vec{u} = 0$  und an den Ebenen senkrecht zur  $z$ -Achse ist  $\partial_z \vec{u} = 0$ . Eine Darstellung der partiellen Ableitung einer Funktion  $u^n(t, x, y, z)$  bezüglich der  $x$ -Richtung durch finite Differenzen mit der Schrittweite  $\Delta x$  ist

$$\partial_x u^n(t, x, y, z)|_{x=i \Delta x} = \frac{u_{l,i+1,j,k}^n - u_{l,i-1,j,k}^n}{2 \Delta x}. \quad (2.18)$$

Die Approximation der Ableitung durch diesen Differenzenquotienten besitzt eine Genauigkeit bis zur zweiten Ordnung, wie sich mittels einer Taylor-Entwicklung von  $u^n(t, x, y, z)$  um  $x = i \Delta x$  zeigen lässt. Am äußeren Rand, beispielsweise bei  $x = (i_{\max} + 2) \Delta x$ , ist die Darstellung über Gleichung (2.18) nicht möglich. Ein einseitiger Differenzenquotient hat nur eine Genauigkeit bis zur ersten Ordnung und würde somit die Genauigkeit des gesamten numerischen Schemas auf die erste Ordnung beschränken. Um dies zu vermeiden, wird folgender Differenzenquotient zweiter Ordnung am Rand genutzt:

$$\partial_x u^n(t, x, y, z)|_{x=(i_{\max}+2)\Delta x} = \frac{u_{l,i_{\max},j,k} - 4u_{l,i_{\max}+1,j,k} + 3u_{l,i_{\max}+2,j,k}}{2\Delta x}. \quad (2.19)$$

Mit der Bedingung eines verschwindenden Gradienten ergibt sich

$$u_{l,i_{\max}+2,j,k} = \frac{4u_{l,i_{\max}+1,j,k} - u_{l,i_{\max},j,k}}{3}. \quad (2.20)$$

Die Randbedingungen an den restlichen Seitenflächen lassen sich analog bestimmen.

Im Gegensatz zu den äußeren Randbedingungen, die bis auf die verallgemeinerten Sonnenwindbedingungen weitgehend von (Ogino 1993) übernommen wurden, müssen die inneren Randbedingungen und die Anfangsbedingungen stärker modifiziert werden. Die Anfangsbedingungen müssen alle physikalischen Größen des Vektors  $\vec{u}$  an jedem Punkt des Raumgitters  $(i, j, k)$  zu einem Zeitpunkt  $l = 0$  festlegen. Das Magnetfeld des Planeten ist für die Bestimmung des Anfangszustands wesentlich. In GEO-Koordinaten kann das Magnetfeld durch eine Multipolentwicklung dargestellt werden, wobei die Entwicklung hier allgemeine Dipol- und Quadrupolbeiträge beinhaltet. Somit kann sowohl ein beliebig orientiertes Dipolmoment als auch ein beliebiger Quadrupolbeitrag verwendet werden. Dies stellt eine Erweiterung zum Simulationscode nach Ogino (1993) dar, welcher lediglich einen Dipol in  $z$ -Richtung, senkrecht zur Sonnenwindgeschwindigkeit, berücksichtigt. Im erweiterten Simulationscode ergibt sich das planetare Magnetfeld über

$$\vec{B}_{\text{Planet}} = \vec{B}_{\text{Dipol}} + \vec{B}_{\text{Quadrupol}}. \quad (2.21)$$

Das Dipolfeld  $\vec{B}_{\text{Dipol}}$  ist dabei in kartesischen Koordinaten über Gleichung (1.15) definiert. Das Magnetfeld des Quadrupols kann über den symmetrischen, spurfreien Quadrupoltenor  $\mathbf{Q}$  bestimmt werden (siehe z. B. Vogt und Glassmeier 2000, Stadelmann et al. 2010). Dieser ist definiert über

$$\mathbf{Q} := \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{xz} & Q_{yz} & -(Q_{xx} + Q_{yy}) \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Dann lässt sich der Quadrupolanteil schreiben als

$$\vec{B}_{\text{Quadrupol}} = \frac{2\mathbf{Q}\vec{r}r^2 - 5Q_{\text{sp}}\vec{r}}{2r^7}. \quad (2.23)$$

Hierbei ist  $Q_{\text{sp}}$  definiert durch

$$Q_{\text{sp}} := Q_{xx}x^2 + 2Q_{xy}xy + Q_{yy}y^2 + 2Q_{xz}xz + 2Q_{yz}yz - (Q_{xx} + Q_{yy})z^2. \quad (2.24)$$

Die Normierung der eingeführten Dipol- und Quadrupolkomponenten lässt sich über die Normierungskonstanten aus Kapitel 2.1 bestimmen. Dabei wurde das Magnetfeld mit einer Oberflächenfeldstärke der Erde und Längen mit dem Erdradius normiert. Dann ist eine Komponente des Dipolmoments beziehungsweise eine Komponente des Quadrupoltensors  $\mathbf{Q}$  mit

$$m_{\text{norm}} = \begin{cases} 8.07 \cdot 10^{15} \text{ T m}^3, & \text{für eine Dipolkomponente} \\ 5.14 \cdot 10^{22} \text{ T m}^4, & \text{für eine Quadrupolkomponente} \end{cases} \quad (2.25)$$

normiert.

Alternativ lässt sich das planetare Magnetfeld (2.21) durch die sphärisch-harmonische Entwicklung darstellen. Das Magnetfeld wird dabei durch die Feldkoeffizienten (1.12)–(1.14) zusammen mit den Basisvektoren (1.5) beschrieben. Die Umrechnung in die kartesischen Koordinaten der Simulation erfolgt dann mit Gleichung (1.4). Es können auch höhere Ordnungen der Multipolentwicklung hinzugenommen werden.

Für den Zeitschritt  $l = 0$  wird ein ruhendes Plasma im ganzen Simulationsgebiet betrachtet, sodass die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  durch  $u_{1,i,j,k}^2 = u_{1,i,j,k}^3 = u_{1,i,j,k}^4 = 0$  initialisiert ist. Ogino (1993) schlug vor, eine zum Planeten hin ansteigende Dichteverteilung zu verwenden. Nach Gleichung (1.47) führt eine größere Dichte zu einer kleineren Alfvéngeschwindigkeit  $v_A$ . Dies ermöglicht meist einen größeren Zeitschritt, weil sich Störungen durch die kleine Alfvéngeschwindigkeit in diesen Regionen langsamer ausbreiten. Allerdings ist die beobachtete Dichte in der Erdmagnetosphäre meist deutlich kleiner als die von Ogino (1993) vorgeschlagene Verteilung. Es wurde hier festgestellt, dass eine Initialisierung der Dichte  $\rho$  auf die initiale Sonnenwinddichte  $\rho_{\text{sw}}$  durch  $u_{1,i,j,k}^1 = \rho_{\text{sw}}$  und des Drucks  $p$  auf den initialen Sonnenwinddruck  $p_{\text{sw}}$  durch  $u_{1,i,j,k}^5 = p_{\text{sw}}$  bessere Resultate für die Verteilung in der inneren Erdmagnetosphäre liefert. Noch bessere Ergebnisse lassen sich durch eine Initialisierung mit der Dichte auf 1/10 der initialen Sonnenwinddichte und des Drucks auf den 20-fachen initialen Sonnenwinddruck erzielen. Dabei muss jedoch der Zeitschritt noch stärker verkleinert werden.

Das Sonnenwindplasma wechselwirkt mit dem planetaren Magnetfeld der Erde und lässt den Sonnenwind in einiger Entfernung zur Erde diese umströmen. Dabei kann durch Prozesse wie magnetische Rekonnexion auch Sonnenwindplasma in die Magnetosphäre eindringen. Durch Rekonnexionsprozesse kann es auch zu einer Konvektionsbewegung des magnetosphärischen Plasmas kommen. Auch die Korotation von Plasma aufgrund der Erddrehung führt zu Strömungen innerhalb der Magnetosphäre. Damit sich die Plasmabewegungen nahe des Planeten mit dem Simulationscode stabil bei der Verwendung von Daten über einige Stunden simulieren lassen, werden innere Randbedingungen benötigt.

Solche inneren Randbedingungen sind noch nicht im Simulationscode nach Ogino (1993) vorhanden. Geeignete innere Randbedingungen werden im Folgenden ausführlich diskutiert. Dazu wird der Planet als Kugel betrachtet, in die kein Plasma eindringen kann, sodass es diese umströmen muss. Die Planetenoberfläche als Kugeloberfläche hat einen Abstand  $R_{\text{Planet}}$  vom Zentrum. Der Abstand eines Gitterpunktes zum Ursprung ist definiert über

$$r_{i,j,k} := \sqrt{(i \Delta x)^2 + (j \Delta y)^2 + (k \Delta z)^2}. \quad (2.26)$$

Die Geschwindigkeit des Plasmas im Inneren des Planeten, das heißt für  $r_{i,j,k} < R_{\text{Planet}}$ , ist

$$u_{l,i,j,k}^n = 0, \quad \text{falls } r_{i,j,k} < R_{\text{Planet}}, \quad n = 2, 3, 4. \quad (2.27)$$

Ohne eine weitere Bedingung für die Geschwindigkeit werden sowohl die Normal- als auch die Tangentialkomponenten der Geschwindigkeit am Planeten auf Null gesetzt. Die resultierende Strömung haftet an der Planetenoberfläche, weshalb sie als Haftströmung bezeichnet wird. Alternativ kann man auch fordern, dass an der Oberfläche des Planeten lediglich die Normalkomponente der Geschwindigkeit bezüglich der Planetenoberfläche Null ist. Es resultiert eine gleitende Umströmung, welche eine tangentielle Geschwindigkeit an der Oberfläche aufweist. Um dies im Simulationscode umzusetzen, betrachtet man zunächst den Geschwindigkeitsvektor an der Oberfläche und zerlegt ihn in seine Normalkomponente und seine Tangentialkomponenten:

$$\vec{v}|_{r=R_{\text{Planet}}} = v_r \vec{e}_r + v_\lambda \vec{e}_\lambda + v_\theta \vec{e}_\theta. \quad (2.28)$$

Dabei sind die Basisvektoren in Gleichung (1.5) bestimmt. Der Radialanteil  $v_r$  in Kugelkoordinaten entspricht dem Anteil normal zur Planetenoberfläche. Die tangentialen Koeffizienten  $v_\lambda$  und  $v_\theta$  lassen sich berechnen durch

$$\begin{aligned} v_\lambda &= \vec{v} \cdot \vec{e}_\lambda, \\ v_\theta &= \vec{v} \cdot \vec{e}_\theta. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Damit ist der tangentielle Anteil des Geschwindigkeitsvektors

$$\vec{v}_\tau|_{r=R_{\text{Planet}}} = (\vec{v} \cdot \vec{e}_\lambda) \vec{e}_\lambda + (\vec{v} \cdot \vec{e}_\theta) \vec{e}_\theta. \quad (2.30)$$

Die zum Gitterpunkt  $(i_d, j_d, k_d)$  benachbarten Punkte sind durch die Menge  $\{(i_d \pm 1, j_d \pm 1, k_d \pm 1)\}$  definiert. Befindet sich ein benachbarter Gitterpunkt  $(i, j, k) \in \{(i_d \pm 1, j_d \pm 1, k_d \pm 1)\}$  innerhalb des Planetenradius, das heißt  $r_{i,j,k} < R_{\text{Planet}}$ , wird die Geschwindigkeit für den Gitterpunkt  $(i_d, j_d, k_d)$  in jedem Zeitschritt durch

$$\begin{aligned} u_{l,i_d,j_d,k_d}^{n=2} &= \vec{v}_\tau|_{r=R_{\text{Planet}}} \cdot \vec{e}_x, \\ u_{l,i_d,j_d,k_d}^{n=3} &= \vec{v}_\tau|_{r=R_{\text{Planet}}} \cdot \vec{e}_y, \\ u_{l,i_d,j_d,k_d}^{n=4} &= \vec{v}_\tau|_{r=R_{\text{Planet}}} \cdot \vec{e}_z \end{aligned} \quad (2.31)$$

auf den tangentialen Anteil beschränkt.

Zusätzlich zu den inneren Randbedingungen für die Geschwindigkeit wird der Simulationscode um Randbedingungen für die Dichte und den Druck erweitert. Dichte- und Druckgradienten zwischen dem Plasma außerhalb des Planeten und dem Planeteninneren dürfen keine Kräfte auf das Plasma außerhalb hervorrufen. Da die MHD-Gleichungen im gesamten Simulationsgebiet zu lösen sind, kann es allerdings zu einer Wechselwirkung zwischen dem Plasma und dem Planeteninneren durch Druck- beziehungsweise Dichtegradienten kommen (siehe Abb. 2.2). Alle Werte an Gitterpunkten innerhalb des Planeten, die mindestens einen benachbarten Gitterpunkt außerhalb haben, werden auf die mittleren Werte für die Dichte beziehungsweise den Druck der benachbarten Gitterpunkte außerhalb gesetzt. Dies minimiert Gradienten und damit die Wechselwirkung zwischen Planet und Umgebung.

Im Simulationscode nach Ogino (1993) wird das Planeteninnere nicht weiter betrachtet, was auch elektromagnetische Induktion im Planeten ausschließt. Das zugrunde liegende MHD-Modell wird dahingehend erweitert, wobei die zeitliche Änderung des Magnetfeldes im Planeten mit der Induktionsgleichung (1.35) berechnet wird. Im Inneren



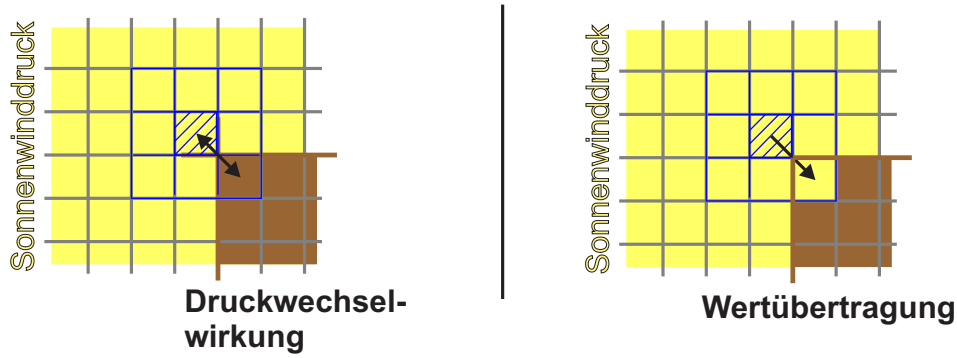


Abbildung 2.2: Randbedingungen für Dichte- und Druckgradienten (nach Nabert et al. 2016b). Diese Randbedingungen sind in den MHD-Gleichungen mit Kräften auf das Plasma verknüpft. Um eine Wechselwirkung zwischen dem Plasma außerhalb des Planeten und dem Planeten selbst durch Druck- beziehungsweise Dichtegradienten zu unterbinden, wird die Dichte beziehungsweise der Druck an der Planetenoberfläche auf umgebende Werte gesetzt.

eines Planeten kann die Geschwindigkeit auf Null gesetzt werden, da der Dynamoprozess auf größeren Zeitskalen als Variationen der Magnetosphäre stattfindet und somit ein stationäres dynamoerzeugtes Magnetfeld angenommen werden kann. Dann lässt sich die Induktionsgleichung zur Diffusionsgleichung vereinfachen:

$$\partial_t \vec{B} = -\nabla \times \left( \frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} \right). \quad (2.32)$$

Die Resistivität beziehungsweise die Leitfähigkeit kann im Inneren des Planeten, wie in Kapitel 1.1 beschrieben, variieren. Dies ist insbesondere bei Merkur wichtig, wobei der Kern mit einer Leitfähigkeit  $\sigma_{\text{Kern}} = 1/\eta_{\text{Kern}}$  und der Mantel mit einer Leitfähigkeit  $\sigma_{\text{Mantel}} = 1/\eta_{\text{Mantel}}$  modelliert wird. Es ergibt sich eine Resistivitätsverteilung

$$\eta = \begin{cases} \eta_{\text{Kern}}, & r < R_{\text{Kern}} \\ \eta_{\text{Mantel}}, & R_{\text{Kern}} \leq r \leq R_{\text{Planet}} \\ \eta_{\text{A}}, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.33)$$

Es ist auch möglich die Resistivität außerhalb des Planeten  $\eta_{\text{A}}$  als räumlich und zeitlich variierend zu betrachten. Allerdings ist es ohne weitere Annahmen nicht möglich die vollständige räumliche und zeitliche Resistivitätsverteilung im Wechselwirkungsgebiet aus Raumfahrzeugmessungen zu bestimmen, sodass ein konstanter Wert angenommen wird. Es wurde auf eine explizite Darstellung einer Ionosphäre verzichtet, um den Simulationscode einfach zu halten. Diese lässt sich jedoch näherungsweise durch die Verwendung einer hohen Leitfähigkeit an der Planetenoberfläche ebenfalls berücksichtigen. Weiterhin sei bemerkt, dass eine Ionosphäre bei Merkur, im Gegensatz zur Erde, nicht relevant ist.

## 2.3 Validierung und Datenvergleich

Das MHD-Modell der Wechselwirkung zwischen dem Sonnenwind und einem planetaren Magnetfeld wird durch einen in Fortran-90 implementierten MHD-Simulationscode realisiert. Eine Übersicht über die numerische Implementierung des Codes findet sich in Anhang B.1. Es wird auch auf die Implementierung der allgemeineren Sonnenwindbedingungen, des beliebig orientierten Dipolmoments, des Quadrupoltensors und der inneren Randbedingungen einschließlich der magnetischen Diffusion im Planeten eingegangen, welche Erweiterungen zum Simulationscode von Ogino (1993) darstellen. Dabei wird auch die Parallelisierung des Simulationscodes beschrieben. Das zugrunde liegende Lax-Wendroff-Schema ist, wie zuvor erwähnt, bereits gut validiert. Daher werden im Folgenden im Wesentlichen Testergebnisse für die zuvor beschriebenen Modifikationen des MHD-Simulationscodes präsentiert.

Zunächst werden die neu eingeführten inneren Randbedingungen getestet. Diese sind nötig, damit die Simulationen der Erdmagnetosphäre auch für lange Simulationszeiten und unterschiedliche Anfangsbedingungen sowie verschiedene Sonnenwindbedingungen stabil durchführbar sind. Dies gilt insbesondere, wenn die Rotation des Planeten und Richtungsänderungen im Sonnenwind zu berücksichtigen sind. Ohne diese Randbedingungen ist es nicht möglich, eine Planetendrehung mit einzubeziehen, wenn das Dipolmoment gegenüber der Rotationsachse verkippt ist. Zum Testen wird anstatt einer Situation in der Magnetosphäre, bei der nur wenig Plasma in einer kurzen Zeit die Planetenoberfläche erreicht, die hydrodynamische Umströmung von Kugeln simuliert. Dabei trifft viel Plasma in kurzer Simulationszeit auf die Oberfläche und die inneren Randbedingungen können getestet werden. Es wird eine Anordnung von zwei hintereinanderliegenden Kugeln gewählt und eine gleitende Strömung betrachtet.

Als Erstes wird eine subsonische Strömung mit einer Einströmdichte von  $N_{\text{SW}} = 5/\text{cm}^3$ , einer Einströmgeschwindigkeit von  $v_{\text{SW}} = 50\text{ km/s}$  und einem Einströmdruck von  $p_{\text{SW}} = 0.0139\text{ nPa}$  simuliert. Die zugehörige Machzahl der Strömung ist  $M_{\text{SW}} = 0.95 < 1$ . Als Anfangsbedingung wird die Simulationsbox mit der Dichte  $N_{\text{SW}}$  und dem Druck  $p_{\text{SW}}$  initialisiert. Die initiale Geschwindigkeit ist Null. Weitere Details zu den Einstellungen der Simulation lassen sich im Anhang B.2 in Tabelle B.1 finden. Es wird ein quasi-stationärer Zustand simuliert. Die Dichteverteilung sowie die Verteilung des Geschwindigkeitsbetrags im quasi-stationären Zustand ist auf der linken Seite in Abbildung 2.3 in einer Koordinatenschnittebene zu sehen. planetares Die Simulation liefert ohne Abbruch einen quasi-stationären Zustand, wobei die Strömung durch die Oberfläche der Kugeln abgebremst und abgelenkt wird. Die Geschwindigkeit vor der ersten Kugel nimmt entlang der  $x$ -Achse zur Oberfläche hin stetig ab und die Dichte steigt an.

Als Zweites wird eine supersonische Umströmung betrachtet. Die Einströmbedingungen sind, bis auf eine höhere Einströmgeschwindigkeit von  $v_{\text{SW}} = 300\text{ km/s}$ , identisch mit den für den Fall der subsonischen Strömung gewählten Bedingungen (siehe Tabelle B.1). Daraus ergibt sich eine supersonische Machzahl der Strömung von  $M_{\text{SW}} = 5.7 > 1$ . Die Ergebnisse für die Dichte- und Geschwindigkeitsverteilung der quasi-stationären Strömung sind auf der rechten Seite von Abbildung 2.3 zu sehen. Im Gegensatz zu der langsam vor der ersten Kugel abgebremsten Strömung im subsonischen Fall wird im supersonischen die Strömung plötzlich nahe der Kugel abgebremst. Dafür ist eine Stoßwelle verantwortlich, die aufgrund der größeren Machzahl auftritt. Auch im supersonischen Fall

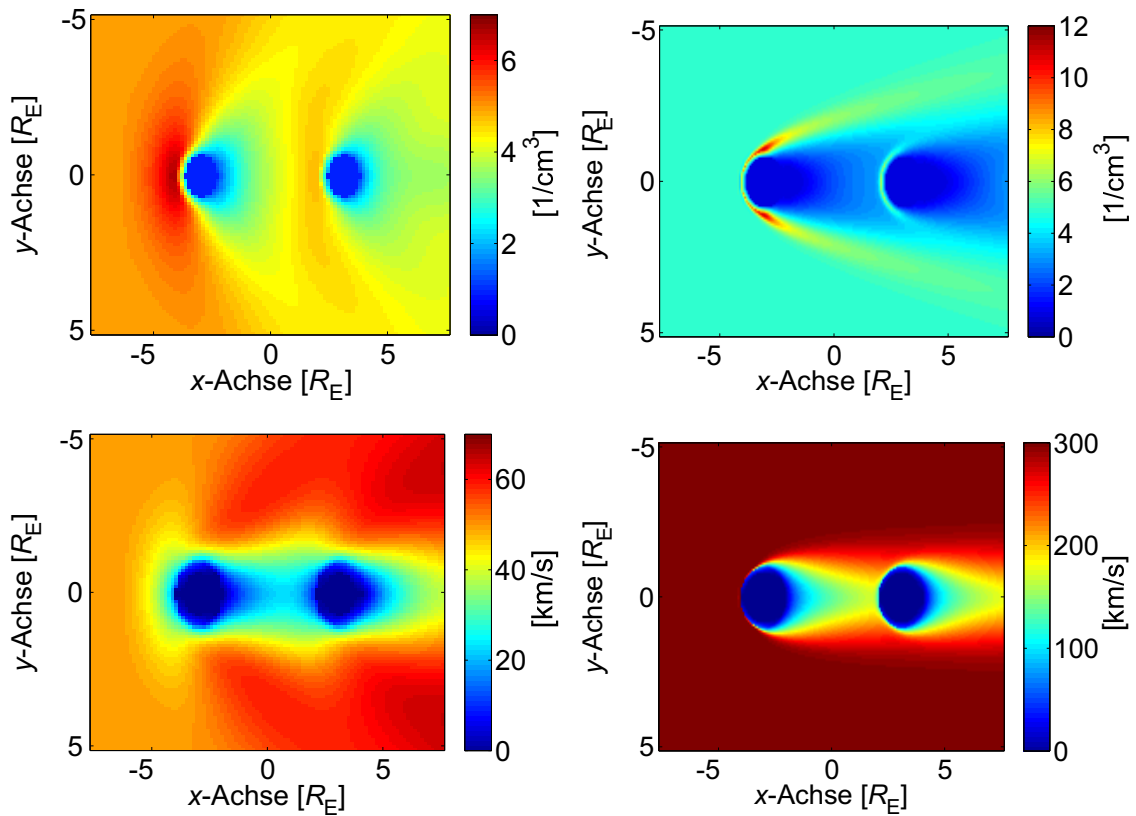


Abbildung 2.3: Hydrodynamische Umströmung von zwei hintereinanderliegenden Kugeln für eine subsonische (links) beziehungsweise eine supersonische (rechts) Strömung zum Testen der inneren Randbedingungen. Dargestellt ist die Dichte (oben) und der Betrag der Geschwindigkeit (unten) in der  $xy$ -Ebene.

ergeben die eingearbeiteten Randbedingungen für eine gleitende Reibung eine stabile Simulation, die nach einiger Zeit auf eine quasi-stationäre Lösung führt.

Als Nächstes wird die Lösung einer MHD-Simulation mit den neuen Rand- und Anfangsbedingungen analysiert. Ein Simulationsergebnis für den quasi-stationären Zustand der Erdmagnetosphäre unter mittleren Sonnenwindbedingungen mit dem modifizierten Simulationscode ist in Abbildung 2.4 dargestellt. Konkret wurde eine Sonnenwinddichte von  $N_{\text{SW}} = 7.5 / \text{cm}^3$ , eine Sonnenwindgeschwindigkeit von  $v_{\text{SW}} = 400 \text{ km/s}$  und ein Druck von  $p_{\text{SW}} = 0.01 \text{ nPa}$  gewählt. Diese Bedingungen ergeben einen nach Shue et al. (1998) typischen dynamischen Sonnenwinddruck von  $2 \text{ nPa}$ . Der Sonnenwind wurde als magnetfeldfrei angenommen. Die detaillierten Einstellungen des Simulationscodes sind in Tabelle B.2 im Anhang B.2 zu finden. Die Simulationsergebnisse der  $xy$ - und  $xz$ -Schnittebenen aus Abbildung 2.4 veranschaulichen die grundlegende Struktur der Erdmagnetosphäre. Auf der linken Seite des Simulationsgebietes strömt der ungestörte Sonnenwind ein. In einem gewissen Abstand zur Erde, abhängig von den Sonnenwindbedingungen, befindet sich die Bugstoßwelle, die das super-magnetosonische Sonnenwindplasma abbremst. Das abgebremste Sonnenwindplasma strömt dann in der Magnetosheath in einem bestimmten Abstand von der Erde um diese herum.

Das starke Dipolfeld der Erde variiert mit dem Abstand über einige Größenordnungen außerhalb der Erde. Dabei nehmen die räumlichen Variationen, also der Gradient des Ma-

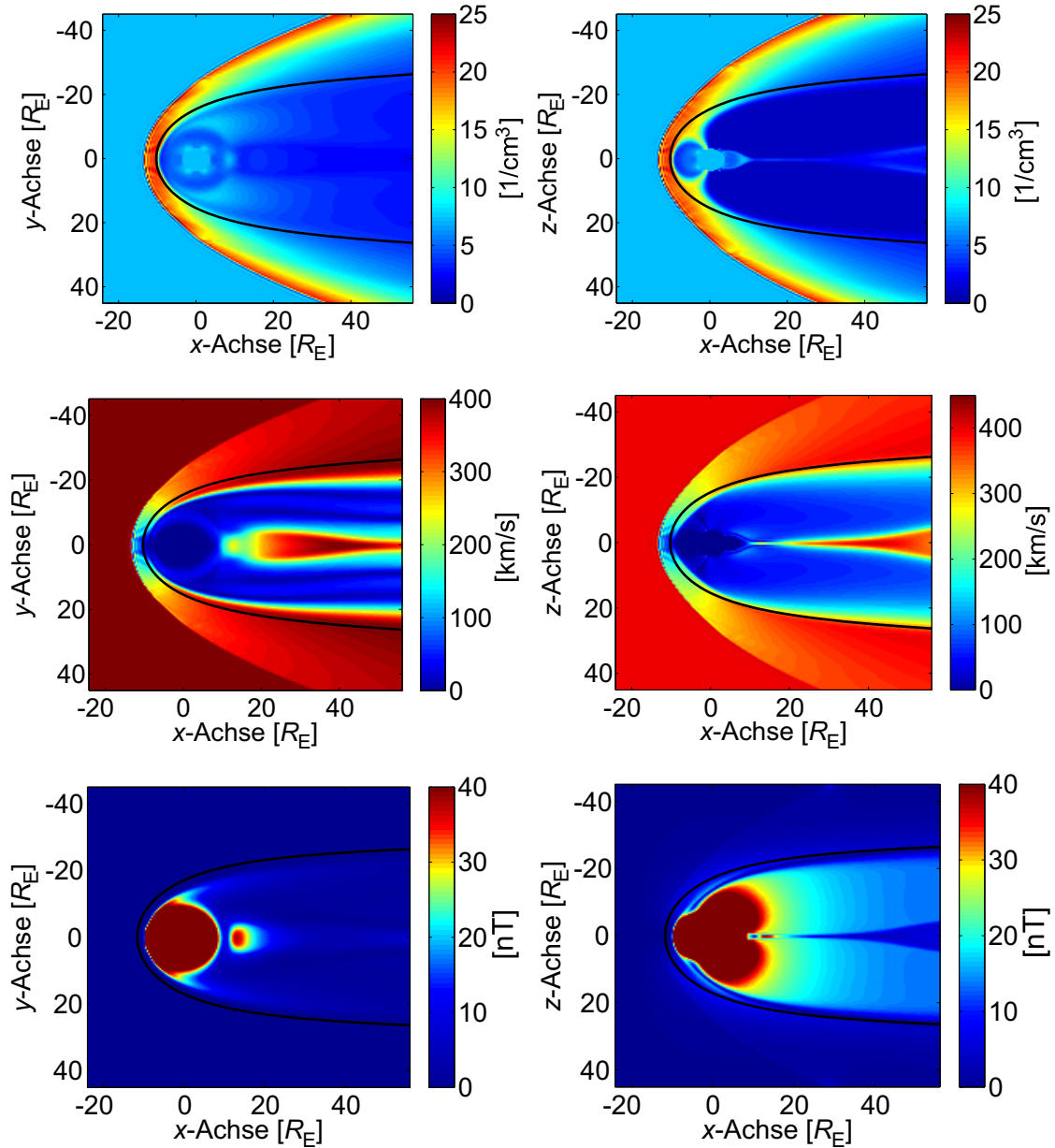


Abbildung 2.4: MHD-Simulation der Erdmagnetosphäre mit dem modifizierten Simulationscode nach Ogino (1993) für mittlere Sonnenwindbedingungen. Dargestellt ist die Dichte (oben), der Betrag der Geschwindigkeit (mitte) und der Betrag des Magnetfeldes (unten) in der  $xy$ -Ebene (links) sowie der  $xz$ -Ebene (rechts). Die Lage der Magnetopause nach dem empirischen Modell von Shue et al. (1998) ist in schwarz eingezeichnet.

gnetfeldes, zum Planeten hin zu. Dies kann wegen der begrenzten räumlichen Gitterauflösung zu großen numerischen Diskretisierungsfehlern in der Berechnung von Magnetfeldgradienten führen. Daher wird in der Simulation ein Planetenradius verwendet, der größer ist als der Erdradius. Grundsätzlich lässt sich erkennen, dass die Dichte nahe der simulierten Planetenoberfläche von  $4 R_E$  klein ist verglichen mit der Dichte in der Magnetosheath. Die Ausnahme bilden die sogenannten Cusp-Regionen des Dipolfeldes, welche dem magnetischen Nord- beziehungsweise Südpol entsprechen. Dort verlassen die Feldlinien konzentriert die Planetenoberfläche beziehungsweise dringen in sie ein. Die zulaufende Magnetfeldgeometrie begünstigt ein Eindringen des Sonnenwindplasmas, wodurch sich dort Teilchen ansammeln können, was zu einer Dichteerhöhung führt. Daher sind diese Regionen in der Dichteverteilung der  $xz$ -Ebene anhand der trichterförmigen Struktur verdichteten Plasmas zu erkennen. Im Schweif, der Wechselwirkungsregion auf der rechten Seite des Simulationsgebietes, ist die Plasmadichte im Allgemeinen klein, jedoch tritt in der Mitte bei  $y = z = 0$  eine höhere Geschwindigkeit als in der Umgebung auf. Diese erhöhte Geschwindigkeit ist mit magnetischer Rekonnexion im Schweif verknüpft, welche aufgrund der antiparallelen Feldlinien zwischen der oberen und der unteren Schweifhälfte stattfinden kann. Dies führt zu konvektiven Strömungen, die innerhalb der Magnetosphäre auftreten und Plasma vom Schweif zurück zur Tagseite der Magnetosphäre bringen. Dadurch ist die Geschwindigkeit des Plasmas innerhalb der Magnetosphäre nicht überall Null.

Die Magnetopause wird in dieser Arbeit als Grenzfläche der Umströmung definiert, die das Sonnenwindplasma vom Plasma der Magnetosphäre trennt. Somit ist die Strömungsgeschwindigkeit stets tangential zur Magnetopause. Eine solche Grenzschicht lässt sich durch eine verschwindende Normalkomponente der Plasmageschwindigkeit bestimmen, auch wenn in der Magnetosphäre Konvektionsströmungen auftreten. Um die Lage der Magnetopause in den Simulationsergebnissen mit Daten zu vergleichen, wird das empirische Magnetopausenmodell von Shue et al. (1998) verwendet. Im empirischen Magnetopausenmodell wurde die Magnetopause anhand einer Scherung des Magnetfeldes aufgrund eines lokalisierten elektrischen Stromes identifiziert. Dieser elektrische Strom entsteht, weil das planetare Magnetfeld wegen der hohen elektrischen Leitfähigkeit nicht in den Sonnenwind eindringen kann. Dieser Strom ist allerdings nur dann vollständig an der in dieser Arbeit definierten Magnetopause lokalisiert, wenn der Sonnenwind kein Magnetfeld besitzt und das Plasma eine unendlich hohe Leitfähigkeit hat. Andernfalls stimmt die Bestimmung der Lage der Magnetopause über den elektrischen Strom nur noch approximativ mit der über die verschwindende Normalkomponente der Geschwindigkeit überein. Die dahinter liegenden physikalischen Effekte werden in Kapitel 4 und 5 noch genauer diskutiert. Für den hier betrachteten Fall eines magnetfeldfreien Sonnenwinds mit hoher Leitfähigkeit stimmen die Definitionen der Magnetopause überein.

Die Magnetopause in dem Shue-Modell wird durch den Folgenden funktionalen Zusammenhang beschrieben:

$$r = r_0 \left( \frac{2}{1 + \cos(\theta_s)} \right)^{\alpha_s}. \quad (2.34)$$

Dabei ist  $r$  der radiale Abstand zum Erdmittelpunkt und  $\theta_s$  der Winkel eines betrachteten Punktes auf der Magnetopausenfläche zur  $x$ -Achse. Die Parameter  $r_0$  sowie  $\alpha_s$  werden empirisch aus beobachteten Magnetopausendurchgängen bestimmt. Dabei werden im Wesentlichen Daten der ISEE (International Sun-Earth Explorer) 1 und 2, der AMPTE

(Active Magnetospheric Particle Tracer Explorers) und der IMP 8 Raumfahrzeuge verwendet. Für die Parameter ergeben sich nach Shue et al. (1998)

$$\begin{aligned} r_0 &= (10.22 + 1.29 \tanh(0.184 (B_{z,\text{SW}} + 8.14))) (p_{\text{dyn,SW}})^{-\frac{1}{6.6}}, \\ \alpha_S &= (0.58 - 0.007 B_{z,\text{SW}}) (1 + 0.024 \ln(p_{\text{dyn,SW}})), \end{aligned} \quad (2.35)$$

mit dem Sonnenwindmagnetfeld  $B_{z,\text{SW}}$  in nT und dem dynamischen Druck im Sonnenwind  $p_{\text{dyn,SW}} := \rho_{\text{SW}} v_{\text{SW}}^2$  in nPa. Die  $z$ -Achse ist dabei, wie in der zuvor gezeigten Simulation, parallel zur Dipolachse.

Die Lage der Magnetopause nach dem Modell von Shue et al. (1998) ist in Abbildung 2.4 eingezeichnet. Beim Vergleichen des Magnetopausenmodells mit der MHD-Simulation muss beachtet werden, dass aufgrund der Konvektionsströmungen der Betrag der Geschwindigkeit auch innerhalb der Magnetopause nicht Null ist. Nur nahe des subsolaren Punktes ist der Betrag der Geschwindigkeit an der Magnetopause identisch mit der Normalkomponente der Strömung. Ein Vergleich ergibt für den subsolaren Magnetopausenabstand in der MHD-Simulationslösung  $9.8 R_E$  und für das Shue-Modell  $10.3 R_E$ . Die Abweichung ist etwas größer als die Auflösungsgenauigkeit durch das numerische Gitter von  $0.4 R_E$ , was auf einen Modellfehler hinweisen könnte.

Für einen detaillierten Vergleich der Lösungen des MHD-Simulationscodes mit Raumfahrzeugdaten wird dieser nun mit Messdaten der THEMIS-Mission (Angelopoulos 2008) verglichen. Die Sonnenwindbedingungen bei der Erde lassen sich entweder aus dem OMNI-Datensatz oder über ein zweites THEMIS-Raumfahrzeug im Sonnenwind bestimmen. Dabei ist die Zeitauflösung und Genauigkeit von Sonnenwinddaten über einen zweiten Satelliten nahe der Bugstoßwelle in der Regel besser als der OMNI-Datensatz. Die Sonnenwindbedingungen müssen zum Einströmrand der Simulationsbox hin transformiert werden. Dazu werden alle Sonnenwinddaten um die Zeit  $\Delta t_{\text{SC/in}}$  verschoben, wobei die Zeitverschiebung analog zu Gleichung (1.20) abzuschätzen ist:

$$\Delta t_{\text{SC/in}} = \frac{\vec{n}_P \cdot \Delta \vec{r}_{\text{SC/in}}}{\vec{n}_P \cdot \vec{v}_{\text{SW}}}, \quad (2.36)$$

mit  $\Delta \vec{r}_{\text{SC/in}} := \vec{r}_{\text{SC}} - \vec{r}_{\text{in}}$ , dem Abstandsvektor zwischen Raumfahrzeugposition  $\vec{r}_{\text{SC}}$  und der Mitte des Einströmrandes des Simulationsgebietes  $\vec{r}_{\text{in}}$ . Ähnlich müssen bei der Verwendung von OMNI-Sonnenwinddaten diese vom subsolaren Punkt der Bugstoßwelle zum Einströmrand transformiert werden. Der subsolare Punkt der Bugstoßwelle  $\vec{r}_{\text{BS}}$ , berechnet sich wie in Kapitel 1.2 dargestellt und liegt im OMNI-Datensatz vor. Die Zeitverschiebung der OMNI-Daten  $\Delta t_{\text{OMNI/in}}$  ergibt sich durch

$$\Delta t_{\text{OMNI/in}} = \frac{\vec{n}_P \cdot (\vec{r}_{\text{in}} - \vec{r}_{\text{BS}})}{\vec{n}_P \cdot \vec{v}_{\text{SW}}}. \quad (2.37)$$

Datenlücken im Sonnenwind werden mit dem letzten vorhandenen Wert aufgefüllt.

Für einen Vergleich zwischen Simulationsergebnissen und Raumfahrzeugdaten müssen die Daten zunächst in MSP-Koordinaten transformiert werden. Dazu erfolgt die Ausgabe der Raumfahrzeugdaten in GEO-Koordinaten. Die Umrechnungen von GSE- und GSM-Koordinaten der Raumfahrzeugdaten in die GEO-Koordinaten des planetaren Magnetfeldes findet sich im Anhang A. Vektoren in diesen Daten werden durch Multiplikation zweier Drehmatrizen  $\mathbf{R}_y(\theta_K)$  und  $\mathbf{R}_z(\lambda_K)$ , wie in Gleichung (A.1) definiert, auf

MSP-Koordinaten gebracht. Die Winkel  $\theta_K$  und  $\lambda_K$  ergeben sich aus dem Geschwindigkeitsvektor des Sonnenwindes zu

$$\begin{aligned}\lambda_K &= \frac{v_{y,\text{SW,GEO}}}{|v_{y,\text{SW,GEO}}|} \arccos \left( \frac{v_{x,\text{SW,GEO}}}{\sqrt{v_{x,\text{SW,GEO}}^2 + v_{y,\text{SW,GEO}}^2}} \right), \\ \theta_K &= \frac{\tilde{v}_{z,\text{SW,GEO}}}{|\tilde{v}_{z,\text{SW,GEO}}|} \arccos \left( \frac{\tilde{v}_{x,\text{SW,GEO}}}{\sqrt{\tilde{v}_{x,\text{SW,GEO}}^2 + \tilde{v}_{z,\text{SW,GEO}}^2}} \right).\end{aligned}\quad (2.38)$$

Dabei ist

$$\vec{v}_{\text{SW,GEO}} = (v_{x,\text{SW,GEO}}, v_{y,\text{SW,GEO}}, v_{z,\text{SW,GEO}})^T \quad (2.39)$$

der Sonnenwindgeschwindigkeitsvektor in GEO-Koordinaten und

$$\tilde{\vec{v}}_{\text{SW,GEO}} := (\tilde{v}_{x,\text{SW,GEO}}, \tilde{v}_{y,\text{SW,GEO}}, \tilde{v}_{z,\text{SW,GEO}})^T := \mathbf{R}_z(\lambda_K) \vec{v}_{\text{SW,GEO}}. \quad (2.40)$$

Ein Vektor in GEO-Koordinaten  $\vec{g}_{\text{GEO}}$  kann in einen Vektor  $\vec{g}_{\text{MSP}}$  in MSP-Koordinaten durch

$$\vec{g}_{\text{MSP}} = \mathbf{R}_y(\theta_K) \mathbf{R}_z(\lambda_K) \vec{g}_{\text{GEO}} \quad (2.41)$$

transformiert werden. Durch die Koordinatentransformation ist der Sonnenwindvektor in MSP-Koordinaten parallel zur  $x$ -Achse.

In GEO-Koordinaten lässt sich das planetare Magnetfeld zeitunabhängig angeben. Unter Verwendung der Normierung (2.25) im Simulationscode ergibt sich das planetare Dipolmoment (1.18) zu

$$\begin{aligned}m_x &= -0.051 m_{\text{norm}}, \\ m_y &= 0.158 m_{\text{norm}}, \\ m_z &= -0.945 m_{\text{norm}}.\end{aligned}\quad (2.42)$$

Für die Simulation muss dieses Dipolmoment in GEO-Koordinaten gemäß der Transformation (2.41) in MSP-Koordinaten gedreht werden. Die Winkel der Transformation ändern sich dabei entlang der Trajektorie des Satelliten. Diese Veränderung beruht dabei hauptsächlich auf der Drehung der Erde um die eigene Rotationsachse. Nutzt man etwa 6 Stunden an Raumfahrzeugdaten, dreht sich die Erde in dieser Zeit um  $90^\circ$ . Da das Dipolmoment eine Neigung besitzt, ändert sich die Ausrichtung des Magnetfeldes innerhalb dieser Zeitspanne. Das planetare Magnetfeld kann stets über das durch Transformation (2.41) gedrehte Dipolmoment bezüglich der aktuellen Winkel  $\theta_K$  und  $\lambda_K$  berechnet werden. Die Drehung in der Simulation wird alle 200 Zeitschritte berücksichtigt, indem das planetare Magnetfeld von dem gesamten Magnetfeld erst abgezogen und dann das zur Simulationszeit passende gedrehte planetare Magnetfeld hinzu addiert wird.

Zunächst wird in der Simulation nur das reine planetare Dipolfeld berücksichtigt und die Wechselwirkung mit dem Sonnenwind vernachlässigt. Dabei ist die Zeitschleife im Simulationscode auf das Drehen des planetaren Magnetfeldes und die Datenausgabe beschränkt. Es wird eine Simulationsbox der Größe  $(30 R_E \times 20 R_E \times 20 R_E)$  mit einer Anzahl von Gitterpunkten  $(600 \times 400 \times 400)$  gewählt. Die Daten von dem THEMIS Raumfahrzeug THC am 24. August 2008 lassen sich dann mit den berechneten Lösungen vergleichen (siehe Abb. 2.5). Dabei befindet sich das Raumfahrzeug zunächst vor der Bugstoßwelle

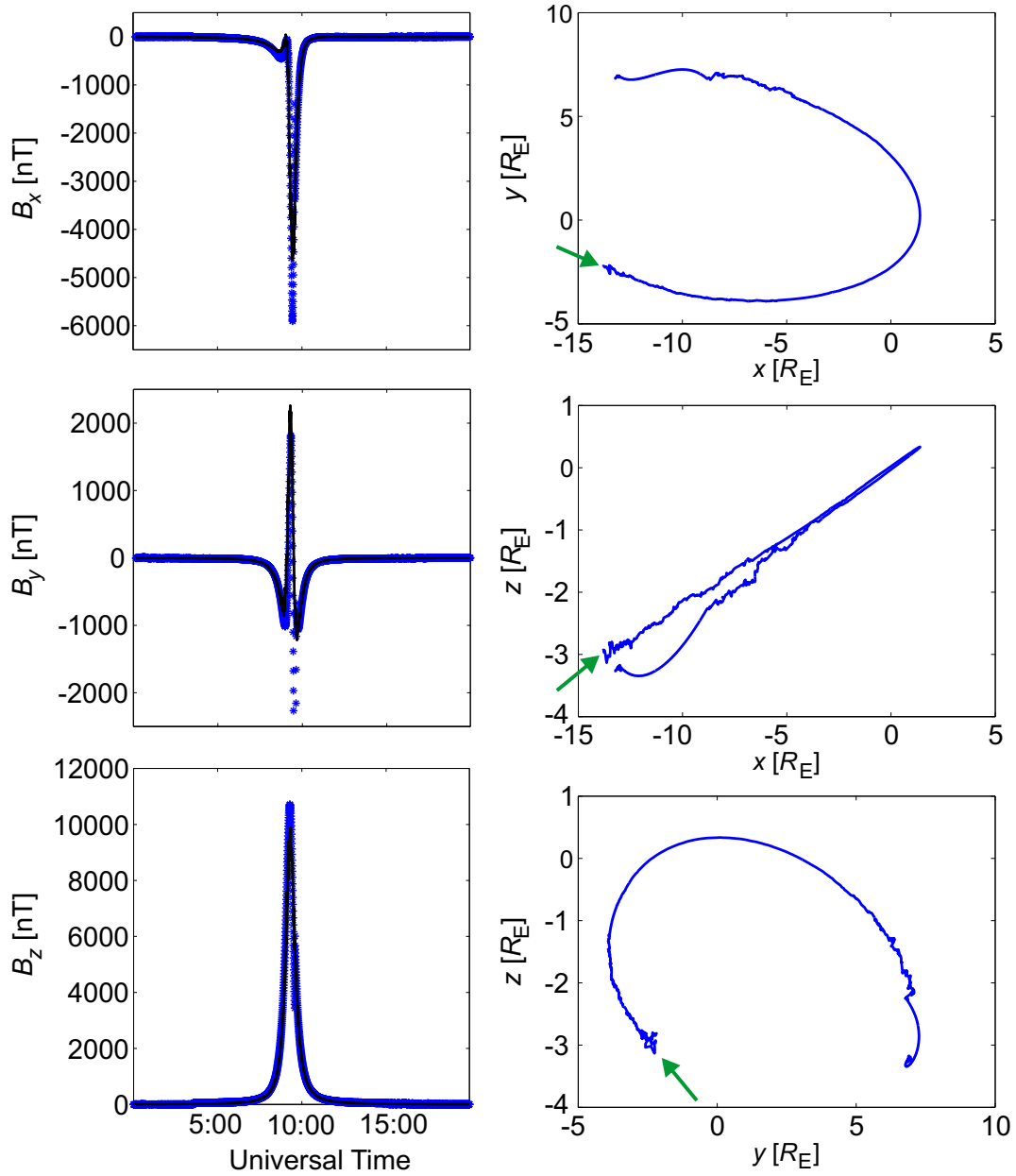


Abbildung 2.5: Vergleich zwischen dem planetaren Magnetfeld in der MHD-Simulation (schwarz) zu den Messungen von THC (blau) am 24. August 2008. Die Magnetfelddaten und zugehörigen Berechnungen sind links und die in das MSP-Koordinatensystem transformierte Raumfahrzeugtrajektorie ist rechts dargestellt. Ein Pfeil kennzeichnet die Bewegungsrichtung des Satelliten.



und durchquert anschließend die Magnetosheath. Dann passiert der Satellit die Nachtseite der Erde, durchquert die Magnetopause, tritt anschließend in die Magnetosheath ein und passiert schlussendlich die Bugstoßwelle. Die Winkel  $\theta_K$  und  $\lambda_K$  wurden aus den OMNI-Sonnenwinddaten bestimmt. Dabei durchläuft der Winkel  $\lambda_K$  in den 20 Stunden etwa  $300^\circ$  aufgrund der Erdrotation. In den letzten 4 Stunden des Orbits ist die Trajektorie des Raumfahrzeugs in der Darstellung aus Abbildung 2.5 nur noch approximativ gültig, da zeitweise keine Sonnenwinddaten vorlagen und dadurch die Bestimmung des Winkels  $\lambda_K$  nicht korrekt durchgeführt werden konnte.

Insgesamt zeigt ein Vergleich der Komponenten des Magnetfeldes eine gute Übereinstimmung zwischen Modellergebnis und Daten. Dies bestätigt eine korrekte Durchführung der Drehung des planetaren Magnetfeldes und der Koordinatentransformationen. Die Maxima in den Feldstärken der Daten sind etwas größer als im Simulationsergebnis, was durch die endliche Gitterauflösung in der Simulation bedingt ist. Der Einfluss der Magnetosheath ist in dieser Darstellung nicht zu erkennen, weil die Feldstärken der elektrischen Ströme der Wechselwirkung bei der Erde in der Größenordnung von 30 nT liegen.

Als Nächstes werden die Daten von THC vom 24. August 2008 unter dem Einfluss der Wechselwirkung des Sonnenwindes betrachtet. Es liegen während des Orbits nur zeitweise Sonnenwinddaten von THB vor, sodass hier OMNI-Sonnenwinddaten Verwendung finden. Nach dem Simulieren eines quasi-stationärer Zustands, wird das zeitabhängige Verhalten unter Hinzunahme der OMNI-Daten berechnet. Die zugehörigen Einstellungen der Simulation sind im Anhang in Tabelle B.2 angegeben. Es wurde im Vergleich zur vorherigen Simulation eine schlechtere Gitterauflösung gewählt, da die Simulationszeit durch die Berücksichtigung der Wechselwirkung länger ist. Die Simulationsergebnisse sind in Abbildung 2.6 zusammen mit den THC-Daten dargestellt. Der Bugstoßwelledurchgang tritt bei etwa 0:30 UT in den Daten und erst über etwa 1:15 h später in der MHD-Simulation auf. Auch die Lage der Magnetopause ist in der simulierten Lösung ähnlich viel später als in den Daten zu sehen. Der Verlauf der physikalischen Größen in der Magnetosheath zeigt ein ähnliches Verhalten in Daten und Simulationsergebnissen. In der Magnetosphäre stimmen die meisten Beobachtungen ebenfalls überein, lediglich die Dichte in der Simulationslösung ist etwas höher als in den Daten. Auch in der zweiten Passage der Magnetosheath kann eine gute Übereinstimmung beobachtet werden, jedoch sind deutlich mehr Variationen in den Daten zu sehen. Dies liegt daran, dass zu der Zeit des Magnetosheathdurchgangs zeitweise keine Sonnenwinddaten von OMNI vorlagen und die fehlenden Daten mit dem letzten vorhandenen Wert ersetzt wurden. Daher lässt sich dieser Magnetosheathdurchgang nicht detailliert vergleichen.

Um die Abhängigkeit der Simulationsergebnisse von den Sonnenwinddaten zu verdeutlichen, wird der erste Magnetosheathdurchgang aus Abbildung 2.6 mit Sonnenwinddaten vom THB-Satelliten simuliert. Die sich dann ergebende zeitabhängige Lösung der Simulation ist mit den THC-Daten in Abbildung 2.7 dargestellt. Die Bugstoßwellenpositionen stimmen besser überein als in der Simulationslösung mit OMNI-Sonnenwinddaten. Lediglich die Dichte von THC in der Magnetosheath ist etwas höher als im Ergebnis der Simulation. Alle anderen Größen stimmen sowohl im Wert als auch im Verlauf innerhalb der Magnetosheath sehr gut überein. Beispielsweise werden die Magnetfeldvariationen in  $B_y$  und  $B_z$  direkt hinter der Bugstoßwelle von der Simulation gut reproduziert. Der Übergang zur Magnetosphäre hin stellt sich in den Daten als scharfer Sprung verglichen mit

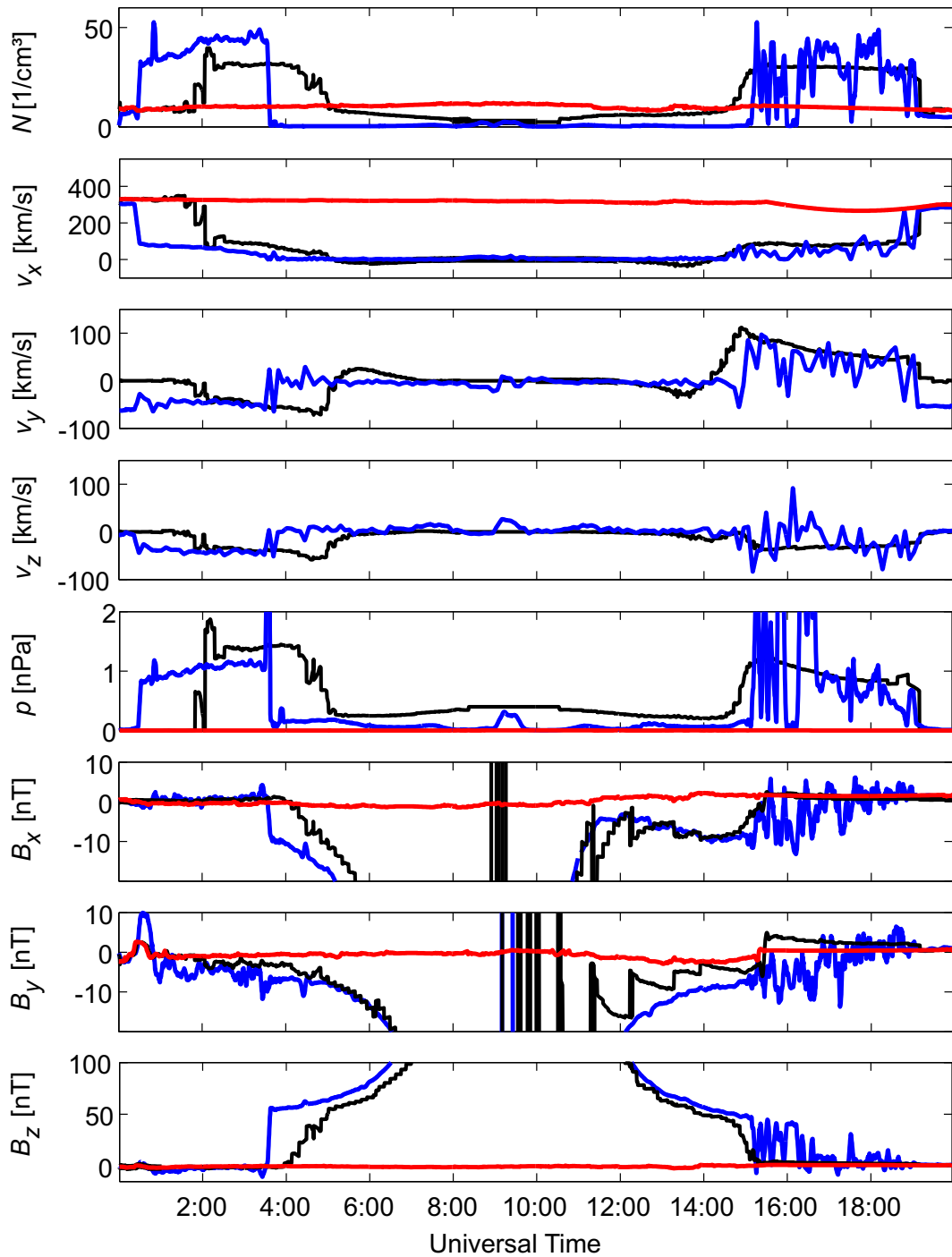


Abbildung 2.6: Vergleich zwischen MHD-Simulationslösung (schwarz) unter Verwendung der Sonnenwindbedingungen von OMNI (rot) mit den THC-Daten (blau) am 24. August 2008.

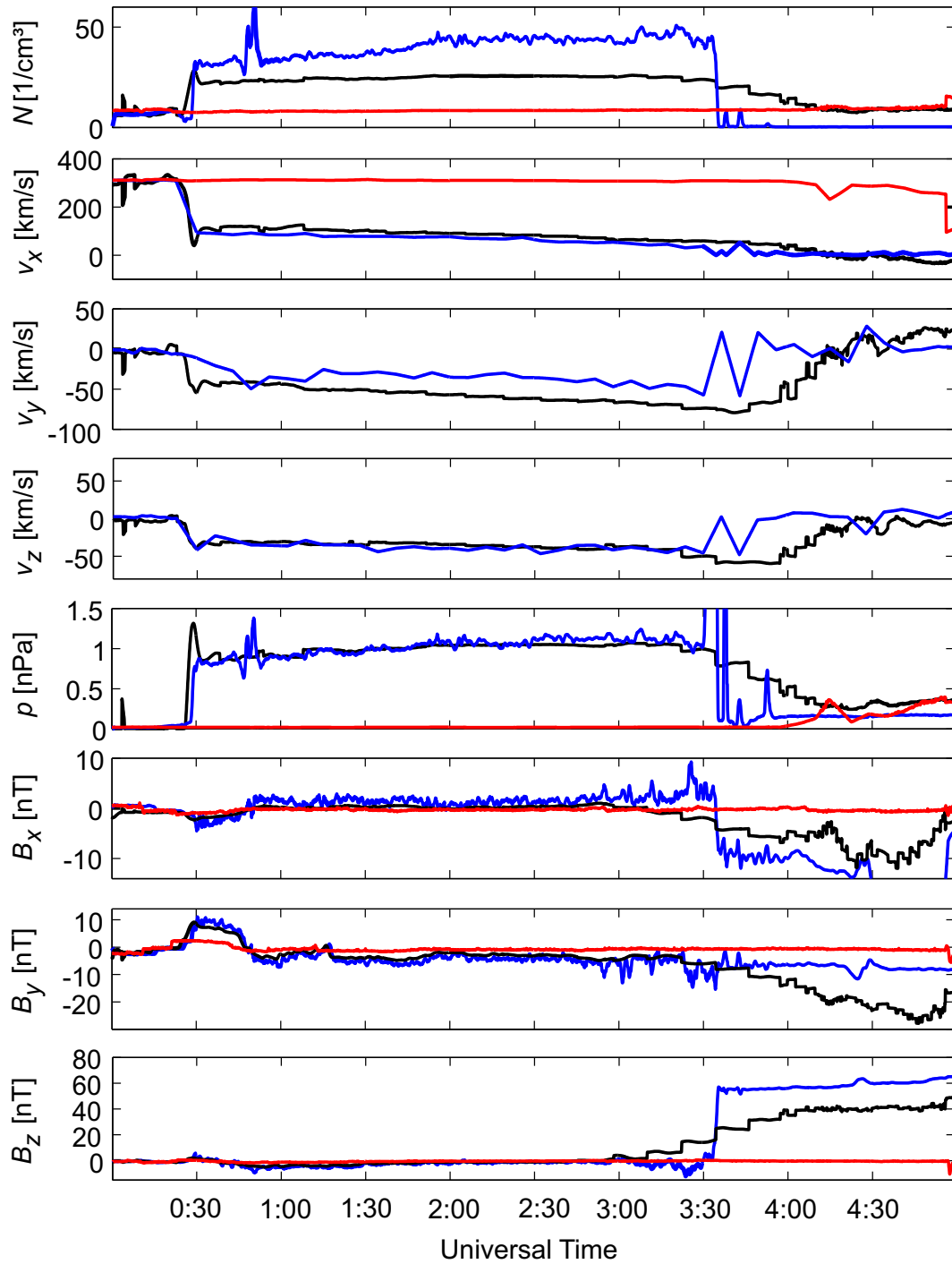


Abbildung 2.7: Vergleich zwischen MHD-Simulationslösung (schwarz) unter Verwendung der Sonnenwindbedingungen von THB (rot) mit THC-Daten (blau) am 24. August 2008 (nach Nabert et al. 2016b).

dem Übergang in der Simulationslösung dar. Weiterhin ist das Magnetfeld hinter der Magnetopause im Ergebnis der MHD-Simulation um etwa 15 nT kleiner als in den Daten. Vergleicht man die Simulationsergebnisse bei Verwendung der OMNI-Sonnenwinddaten mit denen mit THB-Sonnenwinddaten, ist der Einfluss der Sonnenwinddaten auf die Lage der Magnetosheath zu erkennen. In diesem Fall passt die Lage der Simulationsergebnisse mit den THB-Sonnenwinddaten besser zu den Beobachtungen von THC aus der Magnetosheath.

Als Nächstes wird ein Magnetosheathdurchgang von THC am 16. September 2008 betrachtet. Auch hier liegen THB-Sonnenwinddaten vor. Mit diesen Sonnenwinddaten wurde die Zeitabhängigkeit nach dem Erreichen eines quasi-stationären Zustands simuliert. Die THC-Daten zusammen mit den THB-Sonnenwinddaten sind in Abbildung 2.8 mit dem Simulationsergebnis aufgetragen. Das Ende des Bugstoßwellendurchgangs in der Simulationslösung befindet sich bei 17:00 h, wohingegen der Bugstoßwellendurchgang in den Daten etwa eine Stunde später beobachtet wird. Wie im Beispiel zuvor ist die Dichte in der Magnetosheath von THC größer als in der Simulation. Abgesehen davon stimmen Daten und Simulationsergebnis in der Magnetosheath gut überein. In den letzten 45 min ist THB in die Magnetosheath eingetreten und liefert keine Sonnenwinddaten mehr. Kurze Zeit später lassen sich Modelllösung und Daten daher nicht mehr miteinander vergleichen.

Als Letztes wird ein Magnetosheathdurchgang am 28. September 2008 von THC betrachtet. Auch hier werden THB-Sonnenwinddaten genutzt, um, nach dem Erreichen eines quasi-stationärer Zustands, die Zeitabhängigkeit zu simulieren. In Abbildung 2.9 sind die Daten und das zugehörige Simulationsergebnis dargestellt. Anders als im vorherigen Beispiel ist die simulierte Bugstoßwellenposition hier um etwa 45 min später zu beobachten als in den THC-Daten. Insgesamt stimmen Daten und Simulationslösung gut überein, auch wenn ein kleiner Versatz in der  $B_z$ -Komponente des Magnetfeldes zu erkennen ist.

Die Lösung des MHD-Simulationscodes reproduziert die Magnetfeldmessungen in Regionen, wo die Wechselwirkung vernachlässigbar ist, gut (siehe Abb. 2.5). Da die Schätzung des planetaren Magnetfeldes bei Merkur aber in einer durch die Wechselwirkung stark beeinflussten Region stattfindet, wurde die Wechselwirkung in der MHD-Simulation ebenfalls untersucht. Die betrachteten Lösungen können einige der Beobachtungen aus der Wechselwirkungsregion reproduzieren. Beispielsweise zeigten die MHD-Simulationslösungen ebenfalls Strukturen wie die Bugstoßwelle und Magnetopause sowie Variationen durch den Sonnenwind. Im Detail gibt es allerdings Abweichungen. Beispielsweise zeigen die Dichtedaten oftmals einen Versatz zu den Simulationen. Das kann unter anderem durch ein Raumfahrzeugpotenzial erklärt werden (McFadden et al. 2008). Allerdings fällt auf, dass die Dichte in der MHD-Simulation in allen betrachteten Beispielen kleiner als in den Daten ist. Dies könnte auch auf einen systematischen Fehler im Modell hinweisen. Weiterhin ist das Magnetfeld hinter der Magnetopause in der MHD-Simulation oftmals etwas kleiner und der Magnetopausenübergang etwas breiter als in den Daten zu sehen. Möglicherweise hängt dies mit einem numerischen Fehler durch die begrenzte Auflösung der MHD-Simulation zusammen. Die größten Unterschiede zwischen Simulation und Daten gibt es in der Lage der Magnetosheathregion mit den Grenzflächen Bugstoßwelle und Magnetopause. Wie am Beispiel vom 24. August 2008 in den Abbildungen 2.6 und 2.7 gesehen, ist die Lage stark abhängig von Fehlern in den verwendeten Sonnenwindinformationen. Die betrachteten Fälle vom 16. September 2008 und 28. September 2008 in Abbildung 2.8 beziehungsweise 2.9 zeigen, dass sowohl ein zu großer als

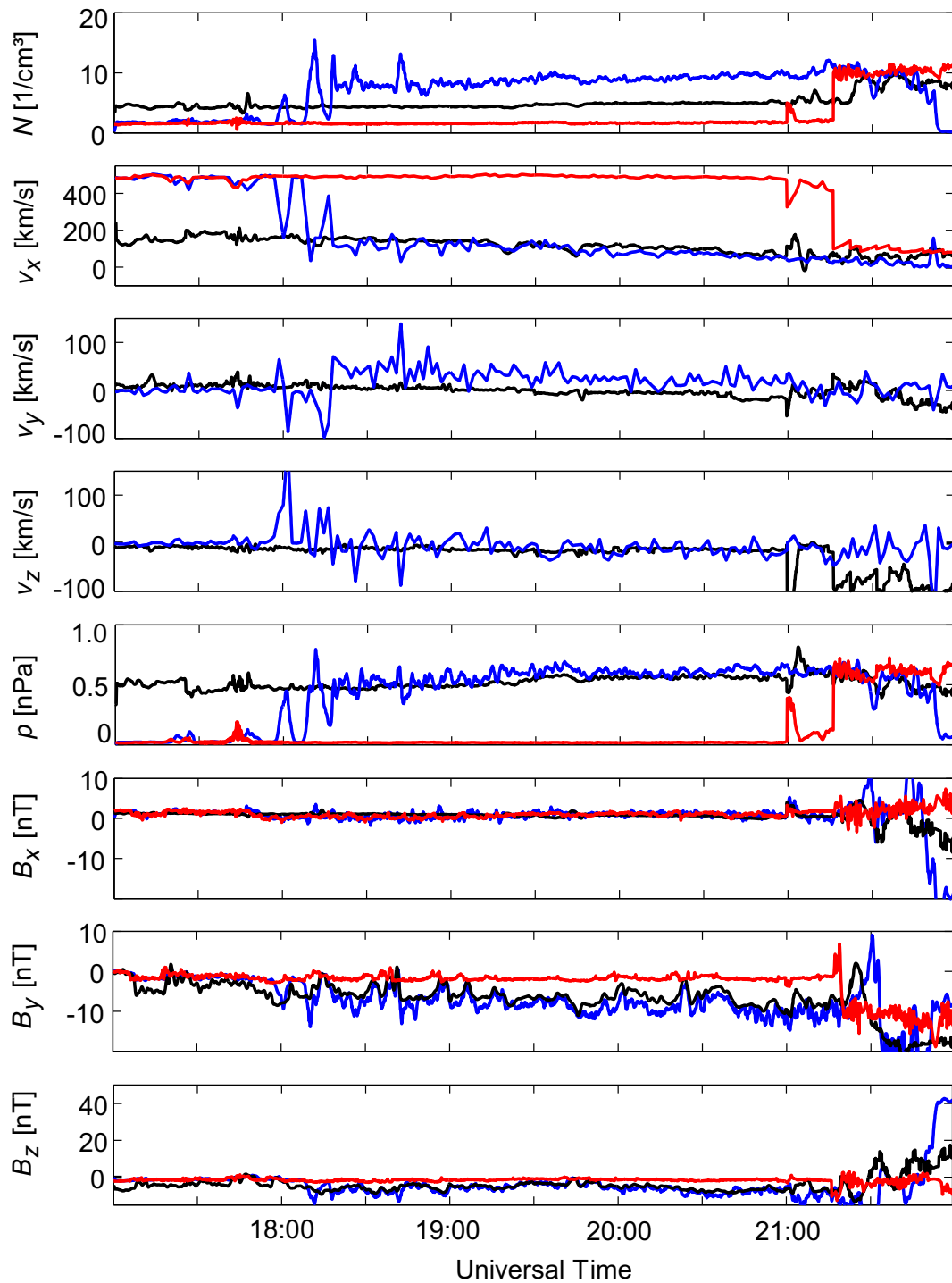


Abbildung 2.8: Vergleich zwischen MHD-Simulationslösung (schwarz) unter Verwendung der Sonnenwindbedingungen von THB (rot) mit THC-Daten (blau) am 16. September 2008.

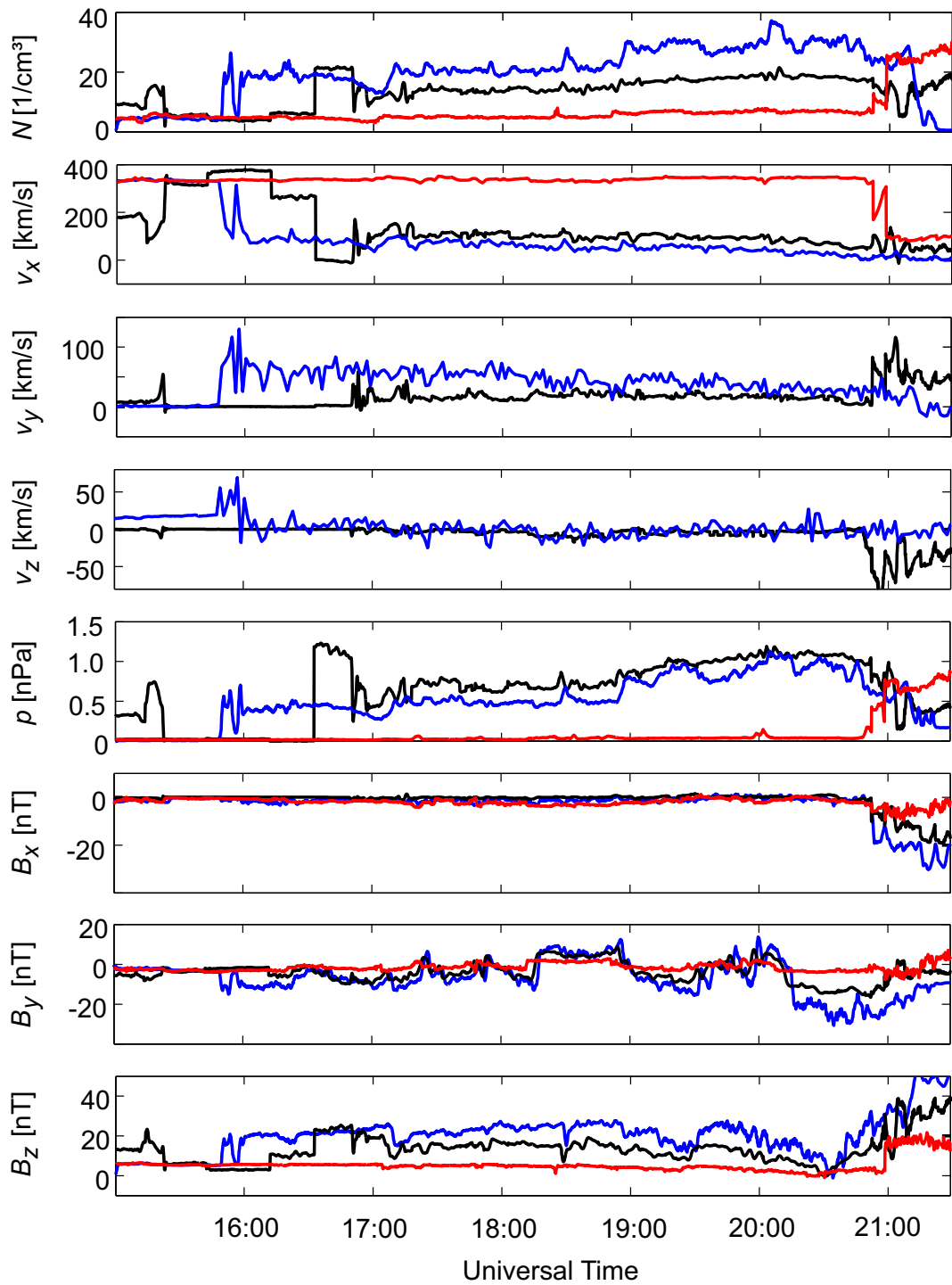


Abbildung 2.9: Vergleich zwischen MHD-Simulationslösung (schwarz) unter Verwendung der Sonnenwindbedingungen von THB (rot) mit THC-Daten (blau) am 28. September 2008.

auch ein zu kleiner Abstand der Bugstoßwelle in der Simulation beobachtet werden kann. Somit könnte sich ein Teil der Fehler durch die Betrachtung vieler Magnetosheathdurchgänge im Mittel aufheben. Andererseits legt ein Vergleich der Simulation zum Magnetopausenmodell von Shue et al. (1998) einen kleinen systematischen Fehler im Modell nahe. Ob solche Fehler der Daten und des Modells signifikante Auswirkungen auf die Schätzung des planetaren Magnetfeldes haben und wie sie sich minimieren lassen, wird im Weiteren untersucht.





## 3 Datenassimilation mit einer MHD-Simulation<sup>1</sup>

In diesem Kapitel wird mit dem zuvor beschriebenen MHD-Simulationscode eine Schätzung des planetaren Magnetfeldes mit Raumfahrzeugdaten vorgenommen. Dabei soll die Schätzung in einer durch die Wechselwirkung dominierten Region stattfinden, ähnlich wie in der Umgebung von Merkur. Es wird angenommen, dass der zuvor vorgestellte MHD-Simulationscode die Wechselwirkung gut genug beschreibt, um einen ersten Schätzer für das planetare Magnetfeld zu bestimmen. Mit bekannten Sonnenwindbedingungen kann man die planetaren Magnetfeldparameter durch eine Anpassung der Simulationsergebnisse an die Raumfahrzeugdaten schätzen.

Dazu wird zunächst eine Kostenfunktion eingeführt, die die Abweichung zwischen den Daten und der MHD-Simulation quantifiziert. Ein gradientenbasiertes Verfahren minimiert die Kostenfunktion bezüglich der planetaren Magnetfeldparameter. Für die zeiteffiziente Berechnung von Gradienten in der Optimierung komplexer Modelle werden oftmals adjungierte Modelle genutzt (siehe z. B. Jameson 1988, Giles und Pierce 2000). Daher wird die Verwendung eines adjungierten MHD-Modells getestet.

Das Verfahren zur Schätzung des planetaren Magnetfeldes wird mit Daten der Mission THEMIS bei der Erde getestet. Bei Merkur ist die gesamte Umgebung des Planeten stark durch die Wechselwirkung beeinflusst. Um das Verfahren bei der Erde mit Messungen aus einer vergleichbaren Region zu testen, werden Daten aus der Magnetosheath zur Schätzung des planetaren Magnetfeldes benutzt. Die benötigten Sonnenwindparameter lassen sich entweder aus dem OMNI-Datensatz oder durch einen zweiten THEMIS-Satelliten bestimmen. Letztere Konfiguration wird dabei bevorzugt verwendet, weil diese auch der durch die BepiColombo-Mission realisierten Situation entspricht. Die Schätzung von Modellparametern durch die Anpassung eines Modells an Daten wird auch als Datenassimilation bezeichnet.

### 3.1 Kostenfunktion und ihre Minimierung

Ein naheliegender Ansatz für eine Kostenfunktion ist, die Methode der kleinsten Quadrate zu nutzen. Diese Methode wurde von Legendre (1806) und Gauss (1809)<sup>2</sup> unabhängig voneinander für Berechnungen in der Himmelsmechanik eingeführt. Heutzutage findet sie weitreichende Anwendung in der Ausgleichsrechnung. Die Summe der Fehlerquadrate

---

<sup>1</sup>Eine verkürzte Darstellung der Inhalte dieses Kapitel findet sich bei Nabert et al. (2016b).

<sup>2</sup>in deutscher Übersetzung von Gauss und Haase (1865)

$FQ$  von  $M_{\text{data}}$  gemessenen Werten  $y_m$  an den Punkten  $x_m$  zu einem Modell  $f_M$  mit den Parametern  $\vec{s}$  ist definiert durch

$$FQ := \sum_{m=1}^{M_{\text{data}}} (y_m - f_M(x_m, \vec{s}))^2. \quad (3.1)$$

Die Parameter  $\vec{s}$  des Modells sind einem Vektorraum  $\mathcal{P}$  zugeordnet. Im Folgenden wird der in Kapitel 2 vorgestellten MHD-Simulationscode mit den Parametern des planetaren Magnetfeldes als Modell betrachtet. Dabei ist das planetare Magnetfeld durch die Komponenten des Dipols und des Quadrupols parametrisiert. Dann ist

$$\vec{s} = (\vec{m}, \vec{Q})^T = (m_x, m_y, m_z, Q_{xx}, Q_{xy}, Q_{xz}, Q_{yy}, Q_{yz})^T, \quad (3.2)$$

mit  $\vec{Q} := (Q_{xx}, Q_{xy}, Q_{xz}, Q_{yy}, Q_{yz})^T$ . Eine Bestimmung der Parameter  $\vec{s}$  eines Modells erfolgt durch eine Minimierung der Summe der Fehlerquadrate  $FQ$  nach Gleichung (3.1). Übertragen auf Magnetfeldmessungen  $\vec{B}_{\text{data}} := (B_{x,\text{data}}, B_{y,\text{data}}, B_{z,\text{data}})^T$  und Simulationsergebnisse  $\vec{B}_{\text{simu}} := (B_{x,\text{simu}}, B_{y,\text{simu}}, B_{z,\text{simu}})^T$  an den Positionen des Raumfahrzeugorbits  $\vec{r}_{\text{SC},m}$  lässt sich die Kostenfunktion  $K$  durch

$$\begin{aligned} K(\vec{s}) = \sum_{m=1}^{M_{\text{data}}} & ((B_{x,\text{data}}(\vec{r}_{\text{SC},m}) - B_{x,\text{simu}}(\vec{r}_{\text{SC},m}, \vec{s}))^2 \\ & + (B_{y,\text{data}}(\vec{r}_{\text{SC},m}) - B_{y,\text{simu}}(\vec{r}_{\text{SC},m}, \vec{s}))^2 \\ & + (B_{z,\text{data}}(\vec{r}_{\text{SC},m}) - B_{z,\text{simu}}(\vec{r}_{\text{SC},m}, \vec{s}))^2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

ausdrücken.

Um die Kostenfunktion  $K$  bezüglich der Parameter  $\vec{s}$  zu minimieren, bietet es sich an, ein Gradientenverfahren zu verwenden. Ausgehend von einem Punkt im Parameterraum  $\vec{s}_0$  wird nach jeder  $k$ -ten Gradientenberechnung ein neuer Punkt  $\vec{s}_k = (\vec{m}_k, \vec{Q}_k)^T$  errechnet. Es gibt keine speziellen Nebenbedingungen, weshalb es sich um ein unrestringiertes Problem der Optimierung handelt. Solche Optimierungsprobleme lassen sich mit einem Quasi-Newton-Verfahren lösen. In dieser Arbeit wird das Verfahren nach Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno (BFGS) verwendet, welches im Anhang C detailliert erläutert ist (Press et al. 1992). Das Verfahren minimiert die Kostenfunktion in Richtung des Gradienten.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten den im Minimierungsalgorithmus benötigten Gradienten einer Kostenfunktion  $K$  an einem Punkt  $\vec{s}_k$  im Parameterraum zu berechnen. Beispielsweise lässt sich der Gradient durch Differenzenquotienten approximieren:

$$\left. \frac{\partial K(\vec{s})}{\partial \vec{s}} \right|_{\vec{s}=\vec{s}_k} \approx \sum_{l=1}^{N_{\mathcal{P}}} \frac{K(\vec{s}_k + \Delta s_l \vec{e}_l) - K(\vec{s}_k)}{\Delta s_l} \vec{e}_l, \quad (3.4)$$

wobei  $\vec{e}_l$  der  $l$ -te Einheitsvektor und  $\Delta s_l$  die zugehörige Schrittweite im Parameterraum  $\mathcal{P}$  ist. Die Summation in Gleichung (3.4) wird über alle Dimensionen des Parameterraums ( $N_{\mathcal{P}} := \dim(\mathcal{P})$ ) ausgeführt. Bemerkt sei, dass der Gradient  $\partial_{\vec{s}} K(\vec{s})$  ein Spaltenvektor ist. Die Schrittweiten  $\Delta s_l$  müssen ausreichend klein gewählt werden, sodass der Gradient hinreichend gut approximiert wird.

## 3.2 Automatisches Differenzieren und adjungierten Methode

Jede Berechnung der Kostenfunktion zu einem Parametersatz erfordert eine vollständige MHD-Simulation der Daten entlang des Raumfahrzeugorbits. Für die Bestimmung des Gradienten nach Gleichung (3.4) müssen  $(N_p + 1)$  Simulationen ausgeführt werden, um die Differenzenquotienten zu berechnen. Das zugrunde liegende MHD-Modell ist nicht-linear, weshalb die Berechnung im Allgemeinen viel Zeit in Anspruch nimmt (konkrete Laufzeitangaben für einen Testrechner finden sich am Ende des Kapitels).

Eine andere Möglichkeit als über Gleichung (3.4) den gesuchten Gradienten  $\partial_{\vec{s}} K(\vec{s})$  zu bestimmen, ist das Differenzieren mittels analytischer Ausdrücke. Dieses Verfahren wird im Folgenden erläutert. Auf dem diskreten numerischen Gitter kann die zeit- und ortsabhängige Lösung der MHD-Simulation  $\vec{u}(t, \vec{x})$  als Vektor  $\vec{u}_{t,\vec{x}}$  aufgefasst werden, der die Lösung zu allen betrachteten diskreten Zeitpunkten an allen diskreten Orten für jede MHD-Größe beinhaltet. Die Anzahl der Komponenten des Vektors  $\vec{u}_{t,\vec{x}}$  ergibt sich folglich aus der Anzahl der Gitterpunkte  $N_{\text{Gitter}}$  nach Gleichung (2.5), der Anzahl der MHD-Variablen  $N_{\text{var}} = 8$  und der Anzahl an Zeititerationen  $l_{\text{max}}$ :

$$N_v = N_{\text{var}} N_{\text{Gitter}} l_{\text{max}}. \quad (3.5)$$

Der Simulationscode berechnet die zeit- und ortsabhängige Lösung der MHD-Variablen  $\vec{u}(t, \vec{x})$  über einen iterativen Prozess. Die Iteration im Simulationscode wird durch die Zeitschleife beschrieben, wobei  $\vec{u}(t = l \Delta t, \vec{x})$  aus dem vorherigen Zeitschritt  $\vec{u}(t = (l-1) \Delta t, \vec{x})$  und den Randbedingungen zu errechnen ist. Äquivalent kann die Zeititeration über  $l$  auch als eine Iteration aufgefasst werden, die die vollständige Lösung  $\vec{u}_{t,\vec{x}}$  stetig besser approximiert. Dabei beinhaltet der Vektor nach dem  $l$ -ten Approximationsschritt  $\vec{u}_{t,\vec{x}}^l$  schon die korrekte Lösung für alle Komponenten, bei denen  $t \leq l \Delta t$  ist. Nach  $l_{\text{max}}$  Iterationsschritten erhält man dann die korrekte Approximation der vollständigen Lösung  $\vec{u}_{t,\vec{x}}^{l_{\text{max}}} = \vec{u}_{t,\vec{x}}$ . Im 0-ten Iterationsschritt wird die Simulation initialisiert. Das initiale Magnetfeld wird durch die Dipol- und Quadrupolparameter bestimmt, sodass der Lösungsvektor  $\vec{u}_{t,\vec{x}}^0$  von den Parametern  $\vec{s}$  explizit abhängt. Der Simulationscode berechnet im  $l$ -ten Iterationsschritt die Lösung aus der vorherigen Approximation durch eine Funktion  $F$ . Für den  $l$ -ten Zeitschritt lässt sich dann schreiben:

$$\vec{u}_{t,\vec{x}}^l(\vec{s}) = F(\vec{u}_{t,\vec{x}}^{l-1}(\vec{s})). \quad (3.6)$$

Die Kostenfunktion  $K(\vec{u}_{t,\vec{x}}^{l_{\text{max}}}(\vec{s}))$  hängt implizit über die Iterationsschritte von den Parametern  $\vec{s}$  ab. Berücksichtigt man die verschachtelten Abhängigkeiten der Lösung nach Gleichung (3.6), dann kann der Gradient der Kostenfunktion im Parameterraum durch die Kettenregel darstellen werden:

$$\frac{\partial K(\vec{u}_{t,\vec{x}}^{l_{\text{max}}}(\vec{s}))}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial K(\vec{u}_{t,\vec{x}}^{l_{\text{max}}})}{\partial \vec{u}_{t,\vec{x}}^{l_{\text{max}}}} \cdot \frac{\partial \vec{u}_{t,\vec{x}}^{l_{\text{max}}}}{\partial \vec{u}_{t,\vec{x}}^{l_{\text{max}}-1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial \vec{u}_{t,\vec{x}}^1}{\partial \vec{u}_{t,\vec{x}}^0} \cdot \frac{\partial \vec{u}_{t,\vec{x}}^0(\vec{s})}{\partial \vec{s}}. \quad (3.7)$$

Nutzt man die folgenden Abkürzungen

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_l^{-1} &:= \frac{\partial \vec{u}_{t,\vec{x}}^l}{\partial \vec{u}_{t,\vec{x}}^{l-1}}, \quad l = 1, 2, \dots, l_{\max}, \\ \vec{g}^T &:= \frac{\partial K(\vec{u}_{t,\vec{x}}^{l_{\max}})}{\partial \vec{u}_{t,\vec{x}}^{l_{\max}}}, \\ \mathbf{B} &:= \frac{\partial \vec{u}_{t,\vec{x}}^0(\vec{s})}{\partial \vec{s}},\end{aligned}\tag{3.8}$$

dann lässt sich Gleichung (3.7) schreiben als

$$\frac{\partial K(\vec{s})}{\partial \vec{s}} = \vec{g}^T \cdot \mathbf{A}_{l_{\max}}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{l_{\max}-1}^{-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{B}.\tag{3.9}$$

Die Funktion  $F$  aus Gleichung (3.6) ist über das Lax-Wendroff-Schema der Differenzialgleichungen nach Gleichung (2.12) und die Randbedingungen bestimmt. Die darin enthaltene Funktion  $f$  ist durch die MHD-Gleichungen festgelegt. Dadurch können die Ableitungen der Matrizen in Gleichung (3.7) mit analytischen Ausdrücken bestimmt werden. Der Simulationscode durchläuft die Zeitschleife über  $l$  von 0 bis  $l_{\max}$ . Im Simulationscode hängt dabei lediglich die Initialisierung  $\vec{u}_{t,\vec{x}}^0$  explizit von den vorgegeben planetaren Magnetfeldparametern ab. Nach jedem Iterationsschritt muss die zugehörige Ableitungsmatrix, mit den dafür notwendigen analytischen Ausdrücken, berechnet werden. Daher kann man nach dem  $l$ -ten Iterationsschritt die Matrix  $\mathbf{A}_l^{-1}$  bestimmen. Ausgehend von einer Einheitsmatrix wird in jedem Iterationsschritt eine Ableitungsmatrix an die linke Seite der Matrix multipliziert, sodass sich nach  $l_{\max}$  Iterationen der gesuchte Gradient  $\partial K(\vec{s})/\partial \vec{s}$  ergibt.

Da die Berechnung des Gradienten zeitgleich zur Ausführung der Iterationsschleife des Simulationscodes stattfindet, wird dieses Verfahren hier auch als analytische Vorwärtsdifferenzierung bezeichnet. Der Vorteil dieses Vorgehens gegenüber der Berechnung des Gradienten über den Differenzenquotienten aus Gleichung (3.4) ist, dass es keinen Approximationsfehler durch die endlichen Schrittweiten  $\Delta s_l$  gibt. Das Einfügen und Zusammenrechnen der Ableitungen im Simulationscode lässt sich durch ein automatisches Differenzierungs-Tool (AD-Tool) durchführen (Wengert 1964). Dazu werden die abzuleitende Funktion (Kostenfunktion  $K$ ) und die abhängigen Variablen nach denen abgeleitet werden soll (Parameter  $\vec{s}$ ), im Code deklariert. Das AD-Tool identifiziert alle weiteren impliziten Abhängigkeiten. Die benötigten analytischen Ausdrücke für die Ableitungen werden aus einer Bibliothek vom AD-Tool an die entsprechenden Stellen in den Code eingefügt. Die Bibliothek enthält die analytischen Ableitungen aller wichtigen Ausdrücke, wie beispielsweise  $\sin(x)' = \cos(x)$ . Die eingefügten Ausdrücke werden dann gemäß Gleichung (3.7) verknüpft, sodass sich schlussendlich der gesuchte Gradient ergibt. In den letzten Jahrzehnten wurden verschiedene AD-Tools entwickelt. In dieser Arbeit kommen das kommerzielle Transformation of Algorithms in Fortran Tool (TAF-Tool) von der Hamburger Firma FastOpt (<http://www.FastOpt.com>) und das quelloffene Tool OpenAD/F (<http://www.mcs.anl.gov/OpenAD/>) zum Einsatz.

Ein AD-Tool kann einen numerischen Code automatisch differenzieren und dabei als ein Black-Box-Programm, das heißt ohne Kenntnis über den genauen Aufbau und Inhalt des Codes, angewendet werden. Beim automatischen Differenzieren von komplexen

numerischen Codes treten unter Umständen Schwierigkeiten auf. Beispielsweise muss oftmals eine Parallelisierung durch das Message Passing Interface (MPI) für den durch das AD-Tool modifizierten Code noch nachträglich eingefügt beziehungsweise optimiert werden. Die analytische Vorwärtsdifferenzierung durch ein AD-Tool wird auch als automatische Vorwärtsdifferenzierung bezeichnet.

Im Rechenaufwand unterscheiden sich die Berechnung durch Differenzenquotienten und die automatische Vorwärtsdifferenzierung kaum. Allerdings gibt es eine Möglichkeit, das zuletzt beschriebene Verfahren schneller zu gestalten, was auf die sogenannte adjungierten Methode führt. Die adjungierten Methode findet weitreichende Anwendung bei Optimierungsproblemen in der Fluidodynamik, wie der Anpassung von Oberflächengeometrien zur Minimierung des Strömungswiderstands (siehe z. B. Jameson 1988, Othmer 2008, 2014, Meader und Martins 2012) oder in der Seismologie (siehe z. B. Fichtner et al. 2006).

Die adjungierten Methode wird im Folgenden anhand linearer Gleichungssysteme eingeführt (siehe z. B. Giles und Pierce 2000, McNamara et al. 2004, Nabert et al. 2015). Dabei ist die Darstellung an die Einführung in Nabert et al. (2015) angelehnt. Um die Übertragung der adjungierten Methode auf den Simulationscode zu erleichtern, werden Symbole in Anlehnung an die vorangegangenen Betrachtungen in diesem Kapitel verwendet und zu deren Unterscheidung mit einem Sternchen als Index versehen. Es wird das Gleichungssystem

$$\mathbf{A}_* \cdot \mathbf{X}_* = \mathbf{B}_*, \quad (3.10)$$

mit Matrizen für die Koeffizienten  $\mathbf{A}_*$ , die Lösung  $\mathbf{X}_*$  und die Inhomogenität  $\mathbf{B}_*$ , betrachtet. Alle Elemente der Matrizen seien reelle Zahlen. Gesucht ist das Skalarprodukt eines Vektors  $\vec{g}_*$  mit der Matrix  $\mathbf{X}_*$ :

$$\vec{g}_*^T \cdot \mathbf{X}_* = ? \quad (3.11)$$

Das Skalarprodukt lässt sich bestimmen, indem man zunächst Gleichung (3.10) löst und dann das Produkt des Vektors  $\vec{g}_*$  mit der Lösung  $\mathbf{X}_*$  bestimmt. Diese Art der Berechnung wird auch als Vorwärtsrechnung bezeichnet.

Eine andere Möglichkeit ist die adjungierten Methode. Zur Herleitung dieser Methode betrachtet man das Produkt eines Vektors  $\vec{y}_*^T$  mit beiden Seiten des linearen Gleichungssystems (3.10):

$$\vec{y}_*^T \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{X}_* = \vec{y}_*^T \cdot \mathbf{B}_*. \quad (3.12)$$

Der Vektor  $\vec{y}_*$  soll dabei definiert sein durch

$$\vec{y}_*^T \cdot \mathbf{A}_* = \vec{g}_*^T. \quad (3.13)$$

Transponieren dieser Gleichung führt auf die adjungierte Gleichung

$$\mathbf{A}_*^T \vec{y}_* = \vec{g}_*. \quad (3.14)$$

Der Name bezieht sich dabei auf Gleichungssysteme im Komplexen, wo Transponieren durch Adjungieren ersetzt werden muss. Mit Gleichung (3.12) und (3.13) lässt sich das Skalarprodukt (3.11) schreiben als

$$\vec{g}_*^T \cdot \mathbf{X}_* = \vec{y}_*^T \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{X}_* = \vec{y}_*^T \cdot \mathbf{B}_*. \quad (3.15)$$

Löst man das adjungierte Gleichungssystem (3.14), kann die Lösung  $\vec{y}_*$  genutzt werden, um  $\vec{y}_*^T \cdot \mathbf{B}_*$  zu berechnen, was nach Gleichung (3.15) dem gesuchten Skalarprodukt (3.11) entspricht. Die Anzahl der benötigten Rechenschritte, insbesondere der benötigten Multiplikationen, ist bei beiden Berechnungswegen für das gesuchte Skalarprodukt unterschiedlich. Für eine numerische Berechnung ist die Laufzeit eines Algorithmus im Wesentlichen durch die Anzahl der benötigten Multiplikationen festgelegt. Ist die Matrix der Inhomogenität  $\mathbf{B}_*$  ein einzelner Spaltenvektor, benötigen beide Wege gleich viele Multiplikationen. Besteht die Matrix der Inhomogenität aus  $N_{*,p}$  Spaltenvektoren, dann müssen für die Vorwärtsrechnung  $N_{*,p}$  lineare Gleichungssysteme mit einem Vektor als Inhomogenität gelöst werden. Für die adjungierte Methode hingegen ist, unabhängig von  $N_{*,p}$ , lediglich das Gleichungssystem (3.14) mit einer Vektor-Inhomogenität zu lösen. Daher benötigt letztere Berechnungsmethode  $N_{*,p}$  Mal weniger Multiplikationen.

Die adjungierte Methode lässt sich auf die Berechnung des Gradienten in Gleichung (3.9) übertragen. Wird das Produkt aller Matrizen  $\mathbf{A}^{-1} := \mathbf{A}_{l_{\max}}^{-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{A}_1^{-1}$  in Gleichung (3.9) substituiert, erhält man

$$\frac{\partial K(\vec{s})}{\partial \vec{s}} = \vec{g}^T \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}. \quad (3.16)$$

Das erste Produkt auf der rechten Seite der Gleichung (3.16) kann durch

$$\mathbf{X} := \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad (3.17)$$

substituiert werden. Identifiziert man die Größen mit dem Sternchen als Index mit den Größen ohne Sternchen, lässt sich Gleichung (3.17) mit dem Lösen des linearen Gleichungssystems (3.10) in Verbindung bringen.

Im Verfahren der analytischen Vorwärtsdifferenzierung wird der Gradient mit der Kettenregel sukzessive von rechts nach links berechnet. Das entspricht einem Vorgehen, bei dem zunächst das Gleichungssystem (3.10) nach  $\mathbf{X}_*$  gelöst und anschließend das Skalarprodukt (3.11) bestimmt wird. Werden die Matrixprodukte in Gleichung (3.16) jedoch von links nach rechts berechnet, wird zunächst das Produkt

$$\vec{y}^T := \vec{g}^T \cdot \mathbf{A}^{-1} \quad (3.18)$$

berechnet. Dies entspricht dem Lösen der adjungierten Gleichung (3.14) nach  $\vec{y}_*$ . Das gesuchte Skalarprodukt (3.11) wird durch  $\vec{y}_*^T \cdot \mathbf{B}_*$  bestimmt, was hier der Multiplikation  $\vec{y}^T \cdot \mathbf{B}$  zur Berechnung der Kostenfunktion entspricht. Das bedeutet, dass die adjungierte Methode dem Ausführen der Multiplikationen von links nach rechts in Gleichung (3.16) entspricht, was hier auch als analytische Rückwärtsdifferenzierung bezeichnet wird.

Die Dimensionen der beteiligten Vektoren und Matrizen sind:  $\dim(\vec{g}) = N_v \times 1$ ,  $\dim(\mathbf{B}) = N_v \times N_p$  und  $\dim(\mathbf{A}) = N_v \times N_v$ . Die Berechnung des Gradienten durch Multiplikation von Matrizen von rechts nach links in Gleichung (3.16) erfordert  $N_{rl}$  Multiplikationen von Komponenten, mit

$$N_{rl} = N_v^2 N_p (N_v + 1). \quad (3.19)$$

Wird der Gradient von links nach rechts in Gleichung (3.16) berechnet, erfordert dies  $N_{lr}$  Multiplikationen von Komponenten, mit

$$N_{lr} = N_v^2 (N_v + N_p). \quad (3.20)$$

Im Grenzfall  $N_{\mathcal{P}} = 1$  ergibt sich  $N_{\text{rl}} = N_{\text{lr}}$ . In der Regel ist  $N_{\mathcal{P}} \ll N_v$ , da das numerische Gitter viele Gitterpunkte umfasst und der hier betrachteter Parameterraum 8 Parameter besitzt. Damit gilt

$$N_{\text{lr}} = N_{\text{rl}} N_{\mathcal{P}}. \quad (3.21)$$

Deshalb ist die Ausführung der Matrixmultiplikationen in Gleichung (3.16) von links nach rechts für viele Parameter vorzuziehen und benötigt etwa  $N_{\mathcal{P}}$  Mal weniger Multiplikationen.

Die numerische Umsetzung der analytischen Rückwärtsdifferenzierung ist allerdings schwieriger als die der analytischen Vorwärtsdifferenzierung. Wie zuvor beschrieben, lässt sich die analytische Vorwärtsdifferenzierung parallel zur Zeititeration im Simulationscode durchführen. Für die Rückwärtsdifferenzierung muss die vollständige Lösung  $\vec{u}_{t,\vec{x}}^{j_{\text{max}}}$  im ersten Berechnungsschritt bekannt sein, damit die Matrixmultiplikation  $\vec{g}^T \cdot \mathbf{A}_{l_{\text{max}}}^{-1}$  berechnet werden kann. Das bedeutet, zuerst ist die Simulation einmalig durchzuführen, wobei alle für die Berechnung der Matrixmultiplikationen benötigten Iterationsergebnisse zwischengespeichert werden. Das gilt auch für die Matrixmultiplikationen in  $\mathbf{A}^{-1}$ , die von allen Iterationsergebnissen  $\vec{u}_{t,\vec{x}}^j$  abhängen. Anschließend kann der Gradient gemäß Gleichung (3.7) beziehungsweise Gleichung (3.7) berechnet werden. Die numerische Umsetzung eines solchen Vorgehens ergibt den adjungierten Simulationscode. Es gibt einige AD-Tools, die nicht nur eine automatische Vorwärtsdifferenzierung durchführen können, sondern auch eine automatische Rückwärtsdifferenzierung. Somit kann über ein AD-Tool ein adjungierter Code generiert werden.

Oft ist jedoch der zur Verfügung stehende Speicher zu klein, um alle benötigten Zwischenergebnisse im Hauptspeicher des Rechners zu speichern. Der Speicherbedarf  $M_{\text{Speicher}}$  lässt sich abschätzen, indem man die Anzahl der Gitterzellen der Simulationsbox  $N_{\text{Gitter}}$  nach Gleichung (2.5) multipliziert mit der Anzahl der Zeitschritte  $l_{\text{max}}$ , der Anzahl der betrachteten MHD-Größen  $N_{\text{var}}$  und der Speichergröße einer MHD-Variablen  $M_{\text{var}}$ :

$$M_{\text{Speicher}} \approx N_{\text{Gitter}} l_{\text{max}} N_{\text{var}} M_{\text{var}}. \quad (3.22)$$

Die Anzahl der Variablen im Simulationscode ist  $N_{\text{var}} = 8$  und für den Speicherbedarf einer Variablen wird  $M_{\text{var}} = 4$  Byte für die Verwendung von float-Variablen angenommen. Damit ergibt sich ein Speicherbedarf von etwa 1600 Gigabyte für ein Simulationsgitter von  $i_{\text{max}} = i_{\text{max}} = k_{\text{max}} = 100$  und  $l_{\text{max}} = 5 \cdot 10^5$ . Der Hauptspeicher ist jedoch meist deutlich kleiner, weshalb ein Teil der Zwischenergebnisse auf der Festplatte gespeichert werden muss. Die Zugriffszeiten des Hauptspeichers sind jedoch wesentlich kürzer, sodass sich, durch das Speichern der Daten auf der Festplatte, die Laufzeit verlängert.

Eine Möglichkeit den Speicherbedarf zu verringern ist das sogenannte Checkpointing. Beim Checkpointing wird die Hauptiterationsschleife des Algorithmus an Kontrollpunkten (englisch: checkpoints) in Unterschleifen unterteilt. Dabei läuft eine Unterschleife über  $N_{\text{loop,check}}$  Iterationen anstatt über die gesamte Zeitschleife mit  $l_{\text{max}}$  Iterationen, wodurch der Speicherbedarf einer solchen Schleife sich reduziert zu

$$M_{\text{Speicher,check}} = \frac{N_{\text{loop,check}}}{l_{\text{max}}} M_{\text{Speicher}}. \quad (3.23)$$

Dadurch kann allerdings die adjungierten Methode nur noch auf die Berechnungen innerhalb einer Unterschleife angewandt werden. Daher senkt Checkpointing zwar den

Speicherbedarf, allerdings auf Kosten der Laufzeit, da sich der Vorteil der adjungierten Methode auf einen kleineren Teil des Algorithmus beschränkt.

### 3.3 Adjungierter MHD-Simulationscode

Auch das AD-Tool für eine automatische Rückwärtsdifferenzierung kann als ein Black-Box-Tool genutzt werden. Das Tool produziert aus dem Code für die Berechnung der Kostenfunktion einen adjungierten Code, der den Gradienten im Parameterraum gemäß der Rückwärtsdifferenzierung berechnet. Es ergeben sich bei der Anwendung des AD-Tools auf komplexe numerische Codes, wie den MHD-Simulationscode, oftmals Probleme. AD-Tools nutzen zwar häufig Optimierungsalgorithmen, jedoch muss in der Regel der adjungierte Code noch weiter optimiert werden.

Der in dieser Arbeit verwendete Simulationscode von Ogino (1993), mit den in Kapitel 2 beschriebenen Modifikationen und Erweiterungen, wurde von der Firma FastOpt adjungiert. Dabei wurde für den Simulationscode der Parameterraum die Dipol- und Quadrupolparameter benutzt, sodass  $\dim(\mathcal{P}) = 8$  ist. Die Firma FastOpt benutzt ihr eigenes AD-Tool, das sogenannte TAF-Tool, welches für das automatische Rückwärtsdifferenzieren geeignet ist (Giering und Kaminski 2003). Das TAF-Tool kann Fortran 90 Codes verarbeiten und generiert daraus einen adjungierten Code in Fortran 90. Dabei kann eine Vorwärtsdifferenzierung oder eine Rückwärtsdifferenzierung durchgeführt werden.

Um den von FastOpt adjungierten MHD-Simulationscode zu testen, werden die vom adjungierten Code berechneten Gradienten bezüglich der Kostenfunktion (3.3), mit Gradienten, die durch Differenzenquotienten nach Gleichung (2.18) bestimmt werden, verglichen. Dazu wird zunächst ein reines, planetares Magnetfeld zusammengesetzt aus Dipol- und Quadrupolanteilen  $\vec{s}_0$  verwendet und die Wechselwirkung des Sonnenwindes mit dem planetaren Magnetfeld vernachlässigt. Daher wird der Gradient am Punkt  $\vec{s}_0$  des Parameterraums betrachtet. Die in der adjungierten Simulation benutzten Konstanten sind im Anhang B.2 in Tabelle B.3 dargestellt. Es werden Punkte  $\vec{s}_0$  mit verschiedenen  $m_z$ -Komponenten zwischen  $0.7 m_{\text{norm}}$  und  $1.2 m_{\text{norm}}$  in Schritten von  $0.1 m_{\text{norm}}$  betrachtet. Zur Berechnung der Kostenfunktion (3.3) werden als Raumfahrzeugdaten synthetische Daten auf der  $x$ -Achse zwischen  $20.2 R_E$  und  $9 R_E$  im Abstand von  $0.42 R_E$  erzeugt. Dazu wird eine MHD-Simulation mit den Konstanten aus Tabelle B.3 genutzt, wobei die Daten aus einem quasi-stationären Zustand nach 175000 Zeitschritten gewonnen werden. Die Gradienten der Kostenfunktion durch den Differenzenquotienten  $\partial_{\vec{s}_0} K_{\text{DQ}}$  und durch die adjungierte Methode  $\partial_{\vec{s}_0} K_{\text{Adj}}$  werden für die verschiedenen  $\vec{s}_0$  bestimmt, ohne die zeitliche Entwicklung der Simulationscodes zu berücksichtigen. Dabei ist der relative Fehler einer  $i$ -ten Komponente des Gradienten über

$$\text{Rel. Fehler} := \frac{(\partial_{\vec{s}_0} K_{\text{DQ}} - \partial_{\vec{s}_0} K_{\text{Adj}}) \cdot \vec{e}_i}{\max(\partial_{\vec{s}_0} K_{\text{DQ}} \cdot \vec{e}_i, \partial_{\vec{s}_0} K_{\text{Adj}} \cdot \vec{e}_i)} \quad (3.24)$$

bestimmt. Die Funktion  $\max(., .)$  gibt dabei das größere der beiden Argument zurück und  $\vec{e}_i$  ist der  $i$ -te Einheitsvektor. Die relativen Fehler für die Dipolkomponenten sind für die verschiedenen  $\vec{s}_0$  in Abbildung 3.1 auf der linken Seite dargestellt. Beide Gradienten stimmen für alle hier betrachteten Werte von  $m_z$  überein. Daraus lässt sich schließen, dass die



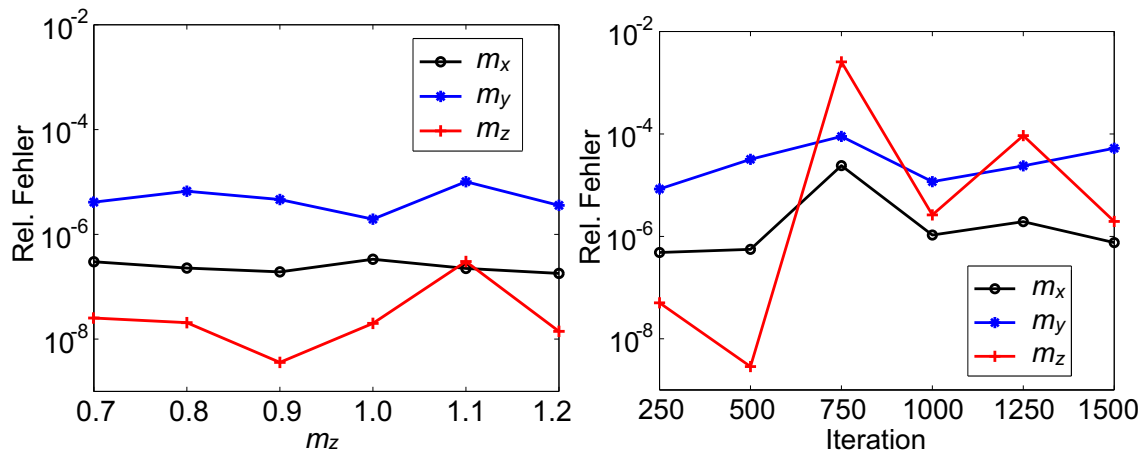


Abbildung 3.1: Der relative Fehler zwischen durch Differenzenquotienten und adjungierter Methode bestimmten Gradienten für die Dipolkomponenten. Dabei ist links die Abhängigkeit bezüglich verschiedener Punkte im Parameterraum und rechts die Abhängigkeit von verschiedenen langen Zeitschleifen dargestellt.

Gradienten, unabhängig von der Position im Parameterraum, bei beiden Methoden gut übereinstimmen.

Als nächstes wird die Wechselwirkung des Sonnenwindes mit dem planetaren Magnetfeld mit berücksichtigt. Die über die adjungierte Methode bestimmten Gradienten werden dazu mit den Gradienten, die durch Differenzenquotienten berechnet werden, für unterschiedlich viele Zeititerationsschritte verglichen. Die relativen Fehler für die Dipolkomponenten sind rechts in Abbildung 3.1 gezeigt. Die Gradienten stimmen auch unter Berücksichtigung der Wechselwirkung für unterschiedlich viele Iterationsschritte stets überein.

Mit einem Testrechner werden Laufzeitbestimmungen für die Berechnungen der Gradienten für verschiedene Zeititerationen durchgeführt. Dieser ist mit 64 Gigabyte Arbeitsspeicher und einem Intel XEON E5 Prozessor mit 12 Kernen und 24 Threads bei einer Taktfrequenz von 2.5 Gigahertz ausgestattet. Der verfügbare Festplattenspeicher beträgt 2 Terabyte. Der Testrechner mit dieser Konfiguration wird im Folgenden mit PC-T bezeichnet. Die Ergebnisse der Laufzeitbestimmungen sind in Abbildung 3.2 zu sehen. Auf der linken Seite der Abbildung sind die Laufzeiten für den adjungierten Code  $t_{Adj}$  und für die Verwendung von Differenzenquotienten bei der Berechnung der Gradienten  $t_{DQ}$  dargestellt. Der Plot rechts gibt die relative Laufzeit der Methoden an, das heißt den Quotienten aus der Laufzeit des adjungierten Codes und der Laufzeit der Bestimmung des Gradienten über Differenzenquotienten. Die Laufzeiten der Gradientenbestimmung steigen ungefähr linear mit der Anzahl der Iterationsschritte an. Für die hier betrachtete Codekonfigurationen und den Testrechner benötigt der adjungierte Code nur etwa 66% der Laufzeit gegenüber der Gradientenbestimmung durch den Differenzenquotienten. Bei 8 betrachteten Parametern werden für die Berechnung des Differenzenquotienten 9 MHD-Simulationen benötigt. Die Berechnung des Gradienten durch die adjungierte Methode erfordert einen Simulationsaufruf zum Zwischenspeichern der MHD-Lösung zu allen Zeitschritten und in etwa einen weiteren, welcher den Gradienten berechnet. Damit würde sich ein theoretisch möglicher Laufzeitvorteil der adjungierten Methode von etwa 22% gegenüber der

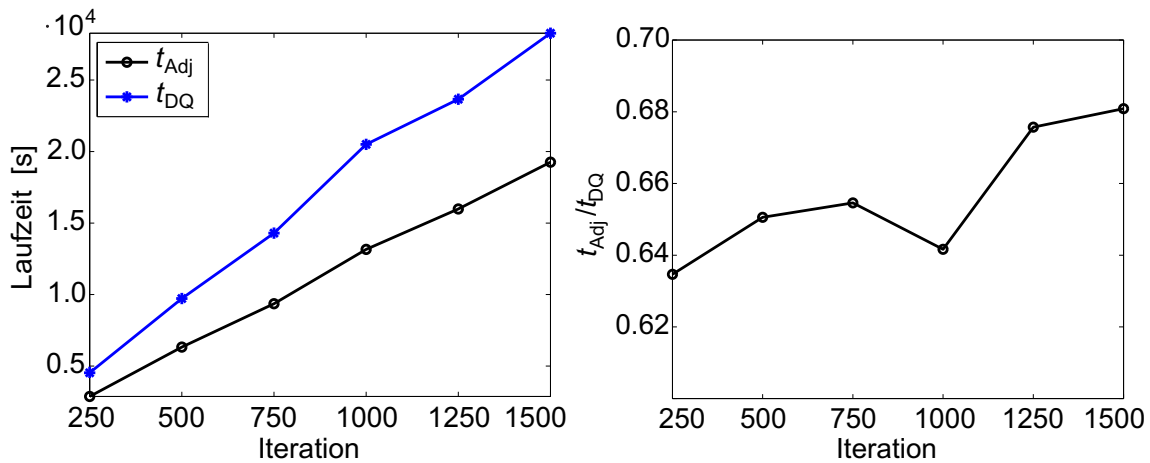


Abbildung 3.2: Links werden die Zeiten, die zur Berechnung des Gradienten durch die adjungierte Methode  $t_{Adj}$  und durch den Differenzenquotienten  $t_{DQ}$  benötigt werden, in Abhängigkeit von der Anzahl der durchgeführten Zeititerationen verglichen (nach Nabert et al. 2016b). Rechts ist das Verhältnis dieser Zeiten gezeigt (nach Nabert et al. 2016b).

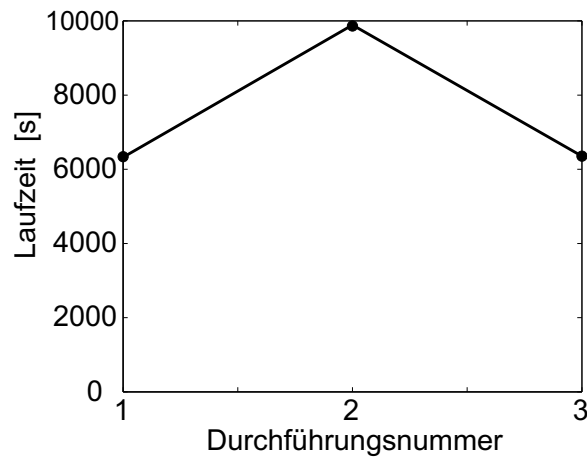


Abbildung 3.3: Laufzeiten des Codes zur Gradientenbestimmung bei 3 verschiedenen Durchführungen. Die Testrechner- und Codekonfigurationen wurden nicht verändert.

Differenzenquotienten-Methode ergeben. Allerdings benötigt der von FastOpt optimierte adjungierte Simulationscode aufgrund der Menge an Daten einige Kontrollpunkte durch Checkpointing, was die Laufzeit der adjungierten Methode deutlich erhöht.

Ein Problem des adjungierten Codes von FastOpt ist der nicht optimal auf die Parallelisierung durch die MPI abgestimmte Speicherzugriff. In Abbildung 3.3 sind Laufzeiten des adjungierten Codes für dieselben Testrechner- und Codekonfigurationen aufgetragen. Es ist eine deutliche höhere Laufzeit im zweiten Versuch verglichen mit den anderen Versuchen zu erkennen. Auch weitere Tests bestätigten die zufällig stark erhöhte Laufzeit. Genauere Untersuchungen ergaben, dass die erhöhte Laufzeit durch den Lese- und Schreibzugriff auf die Festplatte bedingt ist. Zufällig können alle MPI-Prozesse nahezu zeitgleich an gleichen Stellen im Code arbeiten. Der Zufall entsteht, da MPI-Prozesse an die Prozessoren des Rechners verteilt werden, diese Verteilung aber vom Auslastungs- und Arbeitszustand des Rechners abhängt. Dadurch kann es passieren, dass der Speicher-

zugriff beim Speichern von Daten auf die Festplatte, wie es das Checkpointing erfordert, zeitgleich für viele Prozesse stattfindet. Durch die begrenzte Lese- und Schreibgeschwindigkeit der Festplatte bremsen sich die MPI-Prozesse dann gegenseitig aus. Dies lässt sich zum einen durch eine andere Hardwarekonfiguration mit einer größeren Anzahl von Festplatten beheben. Zum anderen können auch MPI-Befehle, die den Prozessablauf stärker einschränken, sodass die Prozesse stets versetzt arbeiten, implementiert werden.

### 3.4 Schätzung der planetaren Magnetfeldparameter

Zunächst wird eine Datenassimilation bei vernachlässigter Wechselwirkung des planetaren Magnetfeldes mit dem Sonnenwind mit synthetisch erzeugten Raumfahrzeugdaten durchgeführt. Dabei hat die Simulationsbox der MHD-Simulationen eine Länge von  $60.2 R_E$  in jeder Dimension. Das Simulationsgitter ist  $i_{\max} = j_{\max} = k_{\max} = 300$ , mit dem Planet im Zentrum der Simulationsbox. Synthetische Raumfahrzeugdaten  $\vec{B}_{\text{data}}$  werden erzeugt, indem das planetare Magnetfeld zu vorgegebenen Dipol- und Quadrupolkoeffizienten  $\vec{s}_{\text{Planet}}$  entlang einer gewählten Trajektorie  $\vec{r}_{\text{SC}}(x) = \vec{r}_{\text{SC},m}$  bestimmt wird. Die gewählte Initialisierung  $\vec{s}_0$  für die Schätzung der planetaren Parameter unterscheidet sich von diesen Momenten. Ausgehend von der Initialisierung  $\vec{s}_0$  für die planetaren Magnetfeldparameter (3.2) wird die Kostenfunktion (3.3) aus Kapitel 3.1 berechnet. Aus der Durchführung einer MHD-Simulation ergibt sich somit für die Parameterinitialisierung  $\vec{s}_0$  ein Wert für die Kostenfunktion  $K(\vec{s}_0)$ . Eine solche MHD-Simulation wird auch bei der Durchführung des adjungierten Simulationscodes ausgeführt, welche die Kostenfunktion berechnet. Dabei werden weiterhin auch alle Zwischenrechnungen gespeichert, sodass anschließend der Gradient der Kostenfunktion am betrachteten Punkt im Parameterraum gemäß Gleichung (3.7) berechnet wird. Dann wird die Kostenfunktion entlang dieses Gradienten mit dem BGFS-Algorithmus, wie im Anhang C beschrieben, minimiert. Man erhält einen neuen Punkt  $\vec{s}_1$  im Parameterraum. Anschließend werden weitere Gradienten über die adjungierte MHD-Simulation berechnet und die Kostenfunktion entlang dieser minimiert.

Als Erstes werden synthetische Daten mit einer Trajektorie von  $\vec{r}_{\text{SC}}(x) = (x, 10.1 R_E - x, 0)^T$  betrachtet. Die Trajektorie verläuft schräg innerhalb der  $xy$ -Ebene am Planeten vorbei. Entlang dieser Trajektorie werden Magnetfelddaten  $\vec{B}_{\text{data}}$  über einen planetaren Dipol in  $z$ -Richtung, das heißt  $\vec{s}_{\text{Planet}} = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)^T m_{\text{norm}}$ , berechnet. Der Startpunkt im Parameterraum ist  $\vec{s}_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T m_{\text{norm}}$ , was einem Dipolmoment in  $x$ -Richtung entspricht. Der Minimierungsalgorithmus aus Kapitel 3.1 berechnet iterativ neue Gradienten, wobei die zugehörigen Dipolparameter in Abhängigkeit von der Iteration in Abbildung 3.4 oben links dargestellt sind. Der gesuchte Vektor des Dipolmoments aus  $\vec{s}_{\text{Planet}}$  ist nach 15 Iterationsschritten sehr gut angenähert.

Als Nächstes werden synthetischen Daten einer anderen Trajektorie verwendet. Dabei wird  $\vec{r}_{\text{SC}}(x) = (x, 30.1 R_E - x, 0)^T$  genutzt, also eine Bahn, die im Vergleich zur vorherigen weiter vom Planeten entfernt liegt. Die Ergebnisse der Schätzung sind in Abbildung 3.4 oben rechts zu sehen. Auch hier konnte der Vektor des Dipolmoments  $\vec{s}_{\text{Planet}}$  gut angenähert werden, jedoch wurden dazu rund doppelt so viele Iterationen im Vergleich zur vorherigen Schätzung benötigt. Dies hängt damit zusammen, dass die Magnetfeldstärke auf einer Trajektorie, die weiter vom Planeten weg ist, kleiner ist.

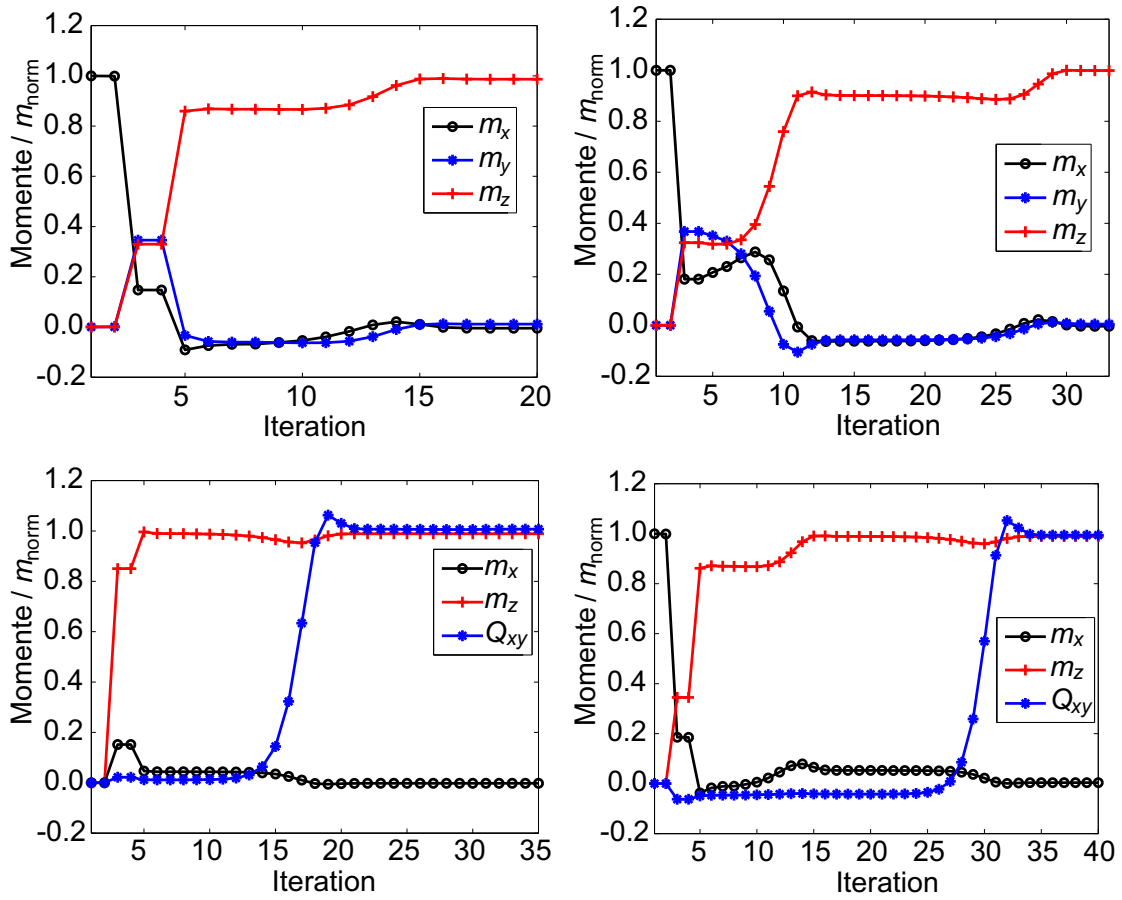


Abbildung 3.4: Rekonstruktion von planetaren Momenten ohne Sonnenwindwechselwirkung aus synthetischen Daten (nach Nabert et al. 2016b). In den Rekonstruktionen oben wurde für das planetare Magnetfeld jeweils nur ein Dipolmoment angenommen. Die Raumfahrzeugtrajektorie wurde oben links näher am Planeten gewählt als oben rechts. Die synthetischen Daten die für Rekonstruktionen unten besitzen dasselbe Dipolmoment wie die oben, jedoch zusätzlich einen Quadrupolanteil. Die unteren Ergebnisse unterscheiden sich in der Wahl der Anfangswerte für die Parameter in der Rekonstruktion.

Die Schätzung sowohl von Dipol- als auch von Quadrupolparametern mit synthetischen Daten wird ebenfalls untersucht. Dabei ist die Bahnkurve durch  $\vec{r}_{SC}(x) = (x, 10.1 R_E - x, 0)^T$  festgelegt. Die Rekonstruktion des planetaren Magnetfeldes, ausgehend von  $\vec{s}_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T m_{\text{norm}}$ , ist in Abbildung 3.4 unten links dargestellt. Zusätzlich wird eine Schätzung der Parameter ausgehend von einem anderen Punkt  $\vec{s}_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T m_{\text{norm}}$ , durchgeführt. Die zugehörigen Ergebnisse sind in Abbildung 3.4 unten rechts zu sehen. In beiden Fällen wurden die Momente  $\vec{s}_{\text{Planet}}$  erfolgreich rekonstruiert. Dabei benötigte die Schätzung mit dem Startvektor, welcher weiter von der Lösung entfernt liegt, etwa 15 Iterationsschritte mehr. Insgesamt lässt sich feststellen, dass sowohl Dipol- als auch Quadrupolparameter durch synthetisch erzeugte Daten gut rekonstruiert werden können, wobei höhere Magnetfeldstärken entlang der Trajektorie oder ein Startpunkt  $\vec{s}_0$  näher am Minimum die Rekonstruktion beschleunigen.

Die ersten Tests haben die prinzipielle Funktionsweise der Datenassimilation über die

Minimierung der Kostenfunktion gezeigt. Im Folgenden wird mit dem Algorithmus die Schätzung des Erdmagnetfeldes mit Daten der THEMIS-Mission (Angelopoulos 2008) aus der Magnetosheath untersucht. Aufgrund der schwachen Quadrupolkoeffizienten des Erdmagnetfeldes ist deren Einfluss in der Magnetopausenregion klein. Der größte Quadrupolparameter liefert bei  $10 R_E$ , nahe der Magnetopause, einen Beitrag von  $< 0.1$  nT. Im Vergleich dazu ist die  $z$ -Komponente des Dipolmagnetfeldes etwa 30 nT. Daher wird sich im Folgenden auf die Schätzung der Dipolmomente der Erde aus der Magnetosheathregion beschränkt. Es ergab sich ein Laufzeitvorteil des adjungierten Codes von bis zu 33% gegenüber der Methode der finiten Differenzen für 8 Parameter. Für die 3 Parameter des Dipolmoments benötigt der adjungierte Code allerdings länger als eine Berechnung des Gradienten über finite Differenzen. Daher wird im Folgenden die Gradientenberechnung über den Differenzenquotienten nach Gleichung (3.4) durchgeführt.

Dazu wird ausgehend von einer Initialisierung  $\vec{s}_0$  für die planetaren Magnetfeldparameter (3.2) die Kostenfunktion (3.3) berechnet. Die benötigten Raumfahrzeugdaten  $\vec{B}_{\text{data}}$  entlang einer Trajektorie  $\vec{r}_{\text{SC},m}$  werden aus den Beobachtungen der THEMIS-Mission gewonnen. Die Transformation der Raumfahrzeugdaten aus GSM-Koordinaten in das MSP-Koordinatensystem wurde in Kapitel 2.3 ausführlich beschrieben. Dabei werden Vektoren in den Daten über Gleichung (2.41) in das Modellkoordinatensystem transformiert. Dann wird eine MHD-Simulation durchgeführt, wobei deren Lösung genutzt wird, um die Kostenfunktion (3.3) zu berechnen. Im Gegensatz zu den vorherigen Untersuchungen wird hier nicht der adjungierte MHD-Simulationscode zur Bestimmung des Gradienten der Kostenfunktion verwendet, sondern die Gradientenberechnung erfolgt gemäß Gleichung (3.4). Dazu werden die einzelnen Komponenten der Dipolparameter jeweils um eine Schrittweite  $\Delta s_l$  variiert, wobei stets eine erneute MHD-Simulation mit Berechnung der Kostenfunktion durchgeführt wird. Dann ergibt sich nach den vier Simulationen der Gradient der Kostenfunktion bezüglich der Dipolparameter gemäß Gleichung (3.4). Anschließend wird die Kostenfunktion entlang dieses Gradienten mit dem BGFS-Algorithmus, wie im Anhang C beschrieben, minimiert. Man erhält einen neuen Punkt im Parameterraum. Anschließend wird die Kostenfunktion iterativ minimiert, wobei jede neue Berechnung eines Gradienten einen neuen Iterationsschritt darstellt.

Mit diesem Verfahren der Datenassimilation lassen sich die in Kapitel 2.3 vorgestellten Magnetosheathdurchgänge von THC bei gleichzeitig vorhandenen Sonnenwindbeobachtung durch THB nutzen, um das Dipolmoment mit seinen Komponenten zu schätzen. Dazu wird eine sich vom Erdmagnetfeld unterscheidende Initialisierung des Magnetfeldes  $\vec{s}_0 = (0.25, 0, -1.2, 0, 0, 0, 0, 0)^T m_{\text{norm}}$  für den Anpassungsprozess gewählt. Die detaillierten Simulationseinstellungen sind im Anhang B.2 in Tabelle B.3 zu finden.

Zunächst werden die Magnetosheathdaten von THC vom 24. August 2008 mit den zugehörigen THB-Sonnenwinddaten aus Abbildung 2.7 zur Anpassung verwendet. Die Ergebnisse sind in Abbildung 3.5 dargestellt. Dabei ist sowohl die Entwicklung der Dipolkomponenten als auch der Verlauf der Kostenfunktion während der Minimierung gezeigt. Die Dipolkomponenten verändern sich in den ersten Iterationen stark. Der Wert der Kostenfunktion fällt insbesondere von Iterationsschritt 0 zu 1 und von Iterationsschritt 6 auf 7 stark ab. Nach 8 Iterationsschritten ändern sich sowohl die Kostenfunktion als auch die Komponenten des Dipolmoments kaum noch. Es folgt als Lösungsvektor nach 13 Iterationsschritten  $\vec{s}_{13} = (-0.072, 0.084, -1.078, 0, 0, 0, 0, 0)^T m_{\text{norm}}$ . Dabei liegen alle Komponenten dichter an den Werten des Dipolmoments der Erde nach Gleichung

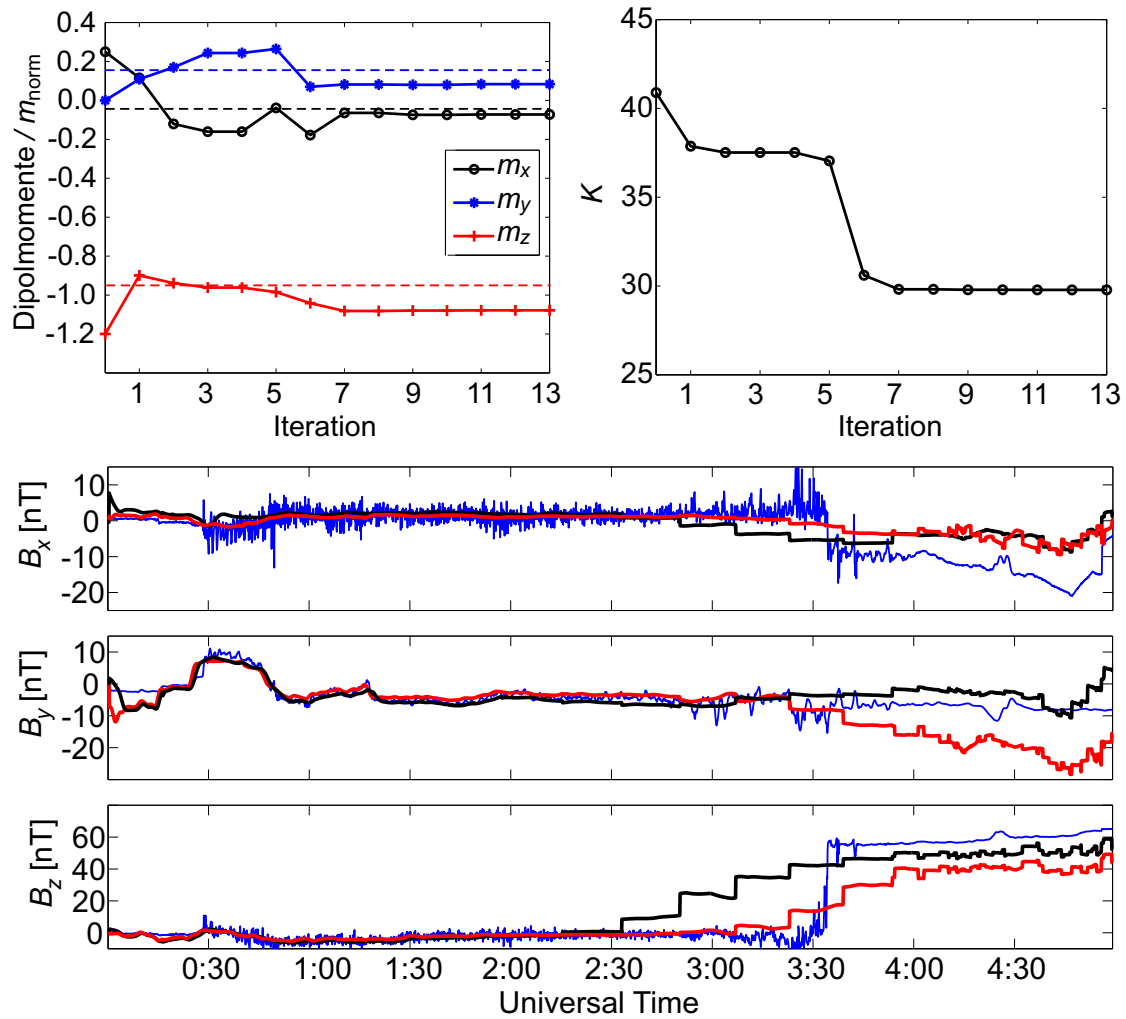


Abbildung 3.5: Rekonstruktion des Dipolmoments für die THC-Daten vom 24. August 2008 mit den THB-Sonnenwinddaten aus Abbildung 2.7 (nach Nabert et al. 2016b). Die Entwicklung der Komponenten des Dipolmoments (oben links) und der Verlauf der Kostenfunktion (oben rechts) sind dargestellt. Die Werte des Dipolmoments der Erde wurden durch gestrichelte Linien eingezeichnet. Der untere Plot zeigt die sukzessive Anpassung der Simulationslösung an die THC-Daten (blau) vor der ersten Iteration (schwarz) und nach der letzten Iteration 13 (rot).

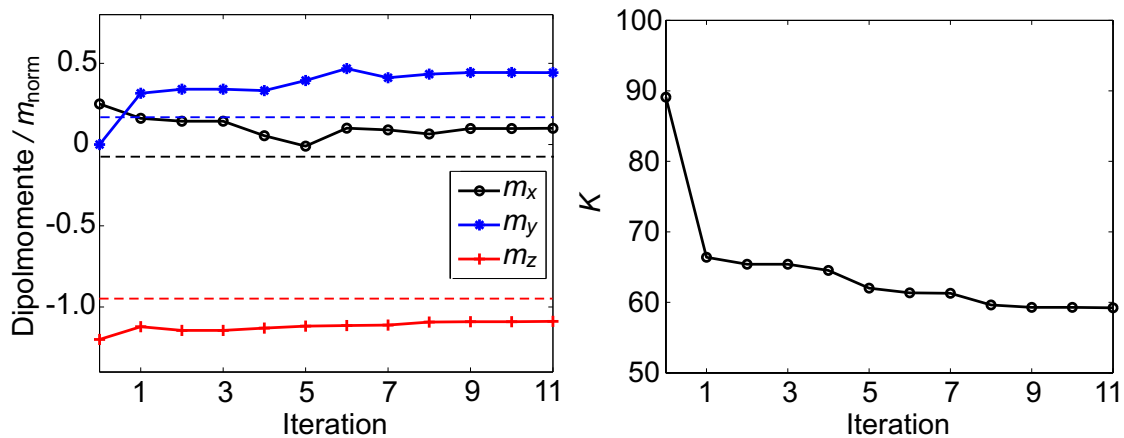


Abbildung 3.6: Rekonstruktion des Dipolmoments für die THC-Daten vom 28. September 2008 mit den THB-Sonnenwinddaten aus Abbildung 2.9. Die Entwicklung der Komponenten des Dipolmoments (links) und der Verlauf der Kostenfunktion (rechts) sind dargestellt. Dabei sind die Werte des Dipolmoments der Erde durch gestrichelte Linien eingezeichnet.

chung (2.42) als die initialen Werte. Bei Verwendung der Normierung (2.25) ergibt sich  $m_x = -0.58 \cdot 10^{15} \text{ T m}^3$ ,  $m_y = 0.68 \cdot 10^{15} \text{ T m}^3$  und  $m_z = -8.70 \cdot 10^{15} \text{ T m}^3$ . Die relativen Fehler ergeben sich zu:  $\Delta m_x = (s_{13,1} - m_{x,E})/m_{x,E} = -0.44$ ,  $\Delta m_y = (s_{13,2} - m_{y,E})/m_{y,E} = -0.47$ ,  $\Delta m_z = (s_{13,3} - m_{z,E})/m_{z,E} = 0.14$ . Der relative Fehler für die  $z$ -Komponente ist am kleinsten, weil die größte Komponente des Dipolmoments bei der Erde entlang der  $z$ -Richtung liegt. Der untere Teil in Abbildung 3.5 zeigen die Magnetfeldkomponenten der MHD-Simulation, die zu den Werten von  $\vec{s}_0$  und zu  $\vec{s}_{13}$  gehören, verglichen mit den Daten von THC. Die  $z$ -Komponente des Magnetfeldes zeigt, dass aufgrund des in der Simulation zu kleinen Feldes hinter der Magnetopause in Abbildung 2.7, die  $z$ -Komponente des Dipolmoments im Betrag etwas zu groß geschätzt wird. Dabei wird die Komponente jedoch nicht wesentlich überschätzt, da ansonsten das Magnetfeld in der Magnetosheath weniger gut übereinstimmt.

Als Nächstes werden die Daten von THC vom 28. September 2008 zusammen mit den THB-Sonnenwinddaten aus Abbildung 2.9 zur Anpassung der planetaren Magnetfeldparameter verwendet. Dabei werden für die letzte Stunde der Daten, in denen sich THB nicht mehr im Sonnenwind befindet, OMNI-Sonnenwinddaten zur Bestimmung der Sonnenwindparameter genutzt. Es wird wieder ein Magnetfeld mit  $\vec{s}_0 = (0.25, 0, -1.2, 0, 0, 0, 0, 0)^T m_{\text{norm}}$  für den Anpassungsprozess initialisiert. Die Resultate sind in Abbildung 3.6 dargestellt. Im ersten Iterationsschritt findet gleich die größte Anpassung statt. Dabei wird die Kostenfunktion um etwa 33% reduziert. Ab Iterationsschritt 9 ändern sich die Werte für das Dipolmoment kaum noch. Nach 12 Iterationsschritten ergibt sich als Schätzer für das Dipolmoment  $\vec{s}_{12} = (0.010, 0.44, -1.088, 0, 0, 0, 0, 0)^T m_{\text{norm}}$ . Bei Verwendung der Normierung (2.25) ergibt sich  $m_x = 0.08 \cdot 10^{15} \text{ T m}^3$ ,  $m_y = 3.55 \cdot 10^{15} \text{ T m}^3$  und  $m_z = -8.78 \cdot 10^{15} \text{ T m}^3$ . Das geschätzte Dipolmoment ist näher am Erddipolmoment als die Initialisierung. Im Vergleich zum Schätzer, der aus den Daten vom 24. August 2008 gewonnen wurde, weichen die Werte etwas mehr vom Erddipolmoment ab. Die relativen Fehler ergeben sich zu  $\Delta m_x = (s_{12,1} - m_{x,E})/m_{x,E} = -1.2$ ,  $\Delta m_y = (s_{12,2} - m_{y,E})/m_{y,E} = 1.8$ ,  $\Delta m_z = (s_{12,3} - m_{z,E})/m_{z,E} = 0.15$ . Diese Werte sind für

die  $x$ - und  $y$ -Komponente deutlich schlechter als für den Datensatz vom 24. August 2008. Dies ist vermutlich darauf zurückzuführen, dass schon beim Vergleich zwischen Daten und Modellergebnis bei diesem Datensatz in Abbildung 2.9 Abweichungen zu erkennen waren.

Eine Herausforderung der Schätzung des planetaren Magnetfeldes stellt die komplexe Berechnung der Wechselwirkung über die MHD-Simulation und die damit zusammenhängende Laufzeit des Anpassungsalgorithmus dar. Die Laufzeit einer Simulation mit den Einstellungen aus diesem Kapitel nach Tabelle B.3 auf dem Testrechner (PC-T) beträgt etwa  $T_{\text{Simu}} \approx 6 \text{ h}$  für 6 h an Daten. Die Berechnung eines Gradienten für die Anpassung von Dipol- und Quadrupolparameter benötigt, ohne Verwendung des adjungierten Codes,  $T_{\text{grad}} = (N_{\varphi} + 1) T_{\text{Simu}} = 9 T_{\text{Simu}}$ . Die Verwendung des adjungierten Simulationscodes würde in etwa einen Laufzeitvorteil von 33% bringen. Für die Anpassung der Dipolparameter wurden etwa 10 Iterationen benötigt, sodass sich eine Zeit für die Minimierung von  $T_{\text{min}} > 90 T_{\text{Simu}}$  für die Anpassung von Dipol- und Quadrupolparametern ergibt. Daher können die Laufzeiten für große Datenmengen mit vielen Magnetosheathdurchgängen und noch höherer räumlicher und zeitlicher Auflösung in der MHD-Simulation stark steigen und eine Berechnung unmöglich machen.

Ein weiteres Problem stellen Daten- und Modellfehler dar. Für beide hier untersuchten Magnetosheathdurchgänge liegt die Abweichung in der Magnitude bei bis zu 25%. Beide verwendeten Datensätze überschätzten die  $z$ -Komponente des Dipolmoments gleichermaßen um etwa 15%. Diese Systematik kann Zufall sein, da bisher lediglich zwei Datensätze betrachtet wurden. Bemerkenswert ist die Überschätzung des Dipolmoments aus dem Datensatz vom 24. August 2008, obwohl in Kapitel 2.3 festgestellt wurde, dass die Geometrie der MHD-Simulation mit den korrekten Werten für das Dipolmoment mit den Beobachtungen übereinstimmt. Die Überschätzung ist auf das zu kleine Magnetfeld hinter der Magnetopause zurückzuführen. Der damit zusammenhängende Fehler ergibt einen Fehler in der Schätzung der  $z$ -Komponente des Dipolmoments von etwa 15% und könnte ein systematischer Fehler in der Schätzung sein.

Insgesamt wurde gezeigt, dass sich mit dem MHD-Simulationscode aus Kapitel 2 eine approximative Schätzung der planetaren Magnetfeldparameter mit der Datenassimilierung nach Kapitel 3.1 berechnen lässt. Das MHD-Modell muss genauer untersucht und gegebenenfalls verbessert werden, um diese erste laufzeitintensive Schätzung der planetaren Magnetfeldparameter präziser und effizienter durchführen zu können. Insbesondere gilt es, systematische Fehler in der Berechnung der Wechselwirkung zu identifizieren und zu vermeiden.



## 4 Reihenentwicklungsmodelle der Wechselwirkung

Im vorherigen Kapitel wurde eine erste Schätzung für das planetare Magnetfeld mit Raumfahrzeugdaten aus einer durch die Interaktion zwischen dem Sonnenwind und dem Planeten modifizierten Region bestimmt. Mit einem solchen Schätzer lässt sich die Wechselwirkung genauer analysieren, um die beteiligten Prozesse und die daraus resultierende Magnetfeldverteilung zu verstehen.

Es wird eine Reihenentwicklungsmethode eingeführt, die eine systematische Untersuchung der Wechselwirkung ermöglicht. Dabei lässt sich der Einfluss von Prozessen der Wechselwirkung durch einen Potenzreihenansatz bezüglich des Abstands zur Staupunktstromlinie ordnen. In den hier betrachteten Strömungen bestimmen hauptsächlich die Prozesse nahe der Stagnationslinie die Abbremsung und Ablenkung des Sonnenwindplasmas. Deshalb genügen bereits niedrige Entwicklungsordnungen der Reihenentwicklungsmethode für eine grundlegende Beschreibung der Wechselwirkung. Daraus ergeben sich reduzierte Modelle, die Reihenentwicklungsmodelle, die die MHD-Beschreibung auf die wesentlichen Prozesse beschränkt. Diese Modelle werden in diesem Kapitel genauer untersucht, um die Wechselwirkung zwischen dem Sonnenwind und dem planetaren Magnetfeld genauer zu verstehen. Die hier hergeleitete Reihenentwicklungsmethode enthält dabei im Grenzfall niedrigster Ordnung auch das in der Masterarbeit von Nabert (2011) beschriebene Modell der Magnetosheath, welches in Abschnitt 4.2 verallgemeinert gelöst wird.

Die Ergebnisse der reduzierten Modelle ermöglichen, systematische Fehler in den zuvor verwendeten MHD-Simulationen zu identifizieren. Damit kann die erste Schätzung des planetaren Magnetfeldes aus dem vorherigen Kapitel weiter verbessert werden. Durch die effiziente Berechnung der Wechselwirkung über ein Reihenentwicklungsmodell lassen sich auch aufwendige Schätzverfahren durchführen.

### 4.1 Theorie<sup>1</sup>

Die physikalischen Größen wie Dichte, Geschwindigkeit, Druck oder Magnetfeld in der stationären Lösung der Magnetosheath können im Rahmen einer MHD-Beschreibung durch die stationären MHD-Gleichungen berechnet werden. Diese Gleichungen hängen von den kartesischen Koordinaten des Raumes  $x, y, z$  ab. Es wird ein Koordinatensystem

---

<sup>1</sup>Dieses Kapitel ist bei Nabert et al. (2013) entnommen, wobei die Darstellung an diese Arbeit angepasst wurde.

betrachtet, bei dem die  $x$ -Achse entlang des Sonnenwindgeschwindigkeitsvektors ist. Die  $y$ - und  $z$ -Richtungen sind senkrecht dazu.

Jede physikalische Größe  $u^n$ , mit einem die Größe bezeichnenden Index  $n$  nach Gleichung (1.37), wird in eine Potenzreihe bezüglich  $y$  und  $z$  um die  $x$ -Achse entwickelt:  $u^n(x, y, z) = u_0^n(x) + u_1^n(x)y + u_2^n(x)z + u_3^n(x)yz + \dots$ . Werden die physikalischen Größen in den stationären MHD-Gleichungen durch diese Reihenentwicklungen substituiert, lässt sich durch einen Koeffizientenvergleich für die Ordnungen in  $y$  und  $z$ , also  $(1, y, z, yz, \dots)$ , ein System gewöhnlicher Differenzialgleichungen ableiten. Die Differenzialgleichungen hängen lediglich von der  $x$ -Koordinate ab.

Es ist vorteilhaft, wenn die Koeffizientenfunktionen der Reihenentwicklungen schnell konvergieren, sodass nur wenige Ordnungen der Entwicklung zu berücksichtigen sind. Für eine schnelle Konvergenz der Entwicklungskoeffizienten muss das Koordinatensystem an die Geometrie der Magnetosheath angepasst werden. Dann hängt das Gleichungssystem der gewöhnlichen Differenzialgleichungen auch von Geometrieparametern der Bugstoßwelle und der Magnetopause ab. Diese Parameter lassen sich bestimmen, indem das Erdmagnetfeld als Hindernis der Sonnenwindströmung berücksichtigt wird. Die Randbedingungen der gewöhnlichen Differenzialgleichungen werden direkt hinter der Bugstoßwelle festgelegt. Die benötigten Werte der physikalischen Größen hinter der Stoßwelle lassen sich über die Rankine-Hugoniot-Bedingungen aus den ungestörten Sonnenwindbedingungen berechnen. In einer MHD-Simulation werden neben solchen Randbedingungen am Einströmrund des Problems auch noch weitere Randbedingungen an den Ausströmrändern benötigt. Durch eine Betrachtung dieser Bedingungen lassen sich, bei einer endlichen Entwicklungsordnung der Reihenentwicklungen, geeignete Schließungsbedingungen für die Koeffizientenfunktionen der höchsten Ordnungen finden.

Insgesamt erhält man ein System von gewöhnlichen Differenzialgleichungen und Bedingungen, welches eine eindeutige Lösung unter Vorgabe des planetaren Magnetfeldes und der Sonnenwindbedingungen liefert. Der Aufbau des Modells ist schematisch in Abbildung 4.1 dargestellt.

### 4.1.1 Grundgleichungen

Um die Darstellung zu vereinfachen, wird sich auf quasi-stationäre Prozesse beschränkt. Eine Diskussion der zugehörigen typischen Zeitskalen für eine quasi-stationäre Magnetosheath ist in Abschnitt 4.5 zu finden. Weiterhin wird sich in diesem Kapitel auf die ideale MHD beschränkt. Die Erweiterung um Effekte aufgrund einer endlichen elektrischen Leitfähigkeit des Plasmas findet sich in Kapitel 5. Unter diesen Annahmen vereinfachen sich die Kontinuitätsgleichung (1.23), die Impulsbilanz (1.31) mit Gleichung (1.32) und das Theorem des eingefrorenen Flusses (1.26) zu

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (4.1)$$

$$\rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p - \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = 0, \quad (4.2)$$

$$\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) = 0. \quad (4.3)$$

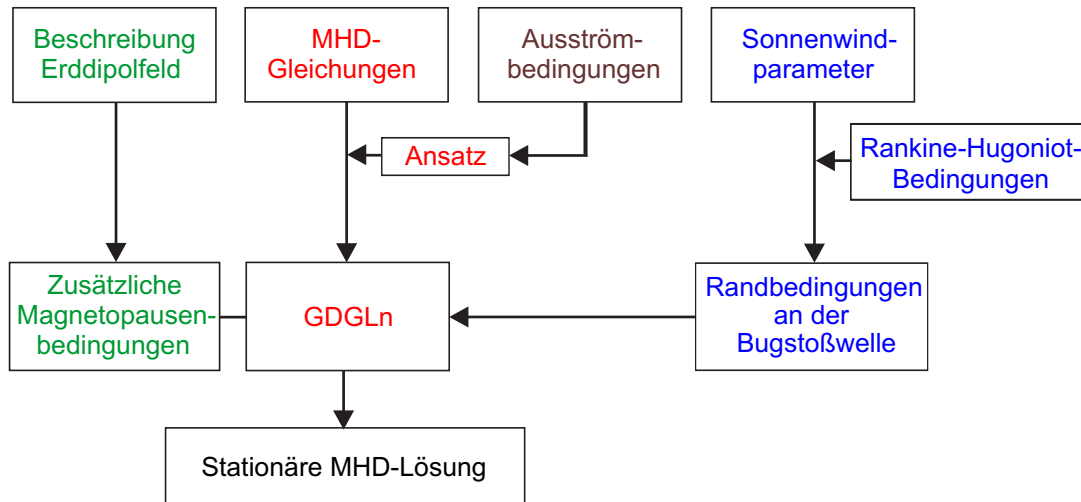


Abbildung 4.1: Übersicht über die Reihenentwicklungsmodelle der Erde (nach Nabert et al. 2013). Die oberste Zeile stellt Vorgaben an das Modell dar. Aus den MHD-Gleichungen lassen sich gewöhnlichen Differenzialgleichungen (GDGLn) herleiten, die zusammen mit den Bedingungen an Bugstoßwelle und Magnetopause die stationäre MHD-Lösung bestimmen.

Die Energiebilanz kann dann, entlang einer Stromlinie in der Magnetosheath, auch durch ein adiabatisches Gesetz angenähert werden:

$$p = k_p \rho^\gamma. \quad (4.4)$$

Hierbei ist  $k_p$  die zugehörige Proportionalitätskonstante. Bemerkt sei, dass diese Näherung nicht an diskontinuierlichen Übergängen, wie der Bugstoßwelle oder der Magnetopause, gültig ist. Die stationären MHD-Gleichungen für die Magnetosheath setzen sich dann aus der stationären Kontinuitätsgleichung (4.1), der stationären Impulsbilanz (4.2), dem stationären Theorem des eingefrorenen Flusses (4.3), dem adiabatischen Gesetz (4.4) sowie der Quelfreiheit des Magnetfeldes (1.29) zusammen.

Der super-magnetosonisch strömende Sonnenwind bei der Erde ruft eine Bugstoßwelle hervor. Der Ursprung des Koordinatensystems wird auf die Bugstoßwelle gelegt. Die  $x$ -Achse ist entlang des Sonnenwindvektors und zeigt in Richtung Erde, die sich bei  $x = x_E$  befindet (siehe Abb. 4.2). Die  $z$ -Achse des Koordinatensystems steht senkrecht zur Ekliptik und zeigt nordwärts. Die  $y$ -Achse vervollständigt ein rechtshändiges Koordinatensystem. Um die Darstellung im Folgenden kompakt zu halten, wird das Sonnenwindmagnetfeld auf die  $z$ -Richtung beschränkt. Weiterhin wird angenommen, dass das planetare Magnetfeld auf den Dipolanteil beschränkt ist, wobei das Dipolmoment in negative  $z$ -Richtung zeigt. Mit diesen Näherungen lässt sich die Wechselwirkung des Sonnenwindes mit der Erde in der Regel gut approximativ beschreiben und die Stagnationslinie liegt auf der  $x$ -Achse. Das planetare Magnetfeld der Erde  $\vec{B}_E$  wird im Rahmen der Dipolnäherung durch Gleichung (1.15) beschrieben mit  $\vec{m} = (0, 0, M)^T$ , wobei  $M < 0$  ist. Es ergibt sich im Koordinatensystem des Modells:

$$B_{E,x} = \frac{3z(x_E - x)}{r^5} M, \quad (4.5)$$

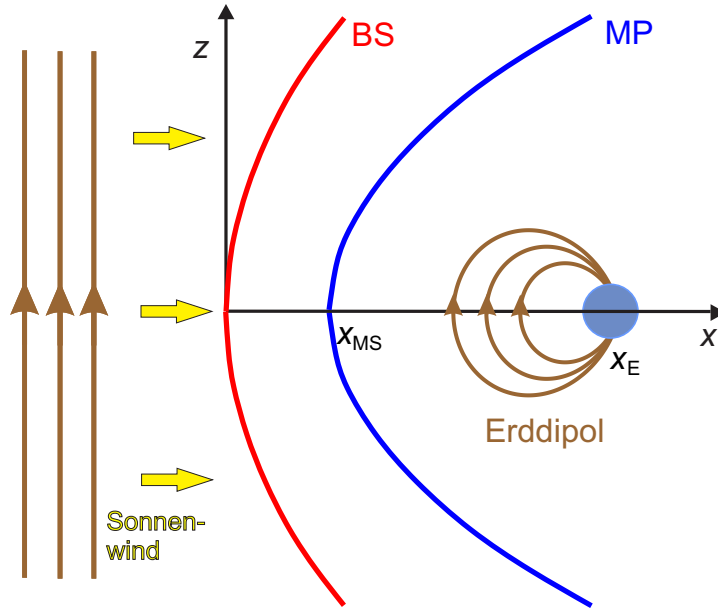


Abbildung 4.2: Bugstoßwellengeometrie mit einem ungestörten Sonnenwind entlang der  $x$ -Achse, wobei das Sonnenwindmagnetfeld entlang der  $z$ -Richtung zeigt (nach Nabert et al. 2013). Das planetare Dipolmoment der Erde ist in negative  $z$ -Richtung orientiert. Der Ursprung des kartesischen Koordinatensystems  $(x, y, z)$  befindet sich am subsolaren Punkt der Bugstoßwelle (BS). Die Magnetopause (MP) schneidet die  $x$ -Achse bei  $x = x_{MS}$ .

$$B_{E,y} = \frac{3yz}{r^5} M, \quad (4.6)$$

$$B_{E,z} = -\frac{-2z^2 + (x_E - x)^2 + y^2}{r^5} M, \quad (4.7)$$

mit  $r := ((x_E - x)^2 + y^2 + z^2)^{0.5}$ , dem Abstand vom Mittelpunkt der Erde (siehe Abb. 4.2). Die Beschreibung im Rahmen der idealen MHD vernachlässigt magnetische Rekonnexion, sodass sich im Folgenden auf positive (nordwärtige) Sonnenwindmagnetfelder beschränkt wird. Dabei ist das planetare Magnetfeld parallel zum Sonnenwindmagnetfeld nahe der Staupunktstromlinie. Die Erweiterung um Rekonnexion und damit auch um negative (südwärtige) Magnetfelder wird später diskutiert.

Durch die Näherungen des Modells besitzt die hier betrachtete Situation Symmetrieeigenschaften, die eine übersichtlichere Darstellung ermöglichen. Die Symmetrierelationen der MHD-Größen bezüglich der  $xy$ - und der  $xz$ -Koordinatenebene sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst. Im Folgenden wird die Herleitung dieser Relationen kurz skizziert. Der ungestörte Sonnenwind strömt entlang der  $x$ -Richtung, mit einem Magnetfeld in  $z$ -Richtung. Sowohl dieser ungestörte Sonnenwind als auch der planetare Dipol, beschrieben durch die Gleichungen (4.5)–(4.7), erfüllen die Symmetrieeigenschaften. Die zeitliche Entwicklung aus einer initialen Situation eines auf das planetare Dipolfeld einströmenden, ungestörten Sonnenwindes wird durch die zeitabhängigen MHD-Gleichungen beschrieben. Die MHD-Gleichungen (1.23), (1.25), (1.26), (1.29) und (1.31) erhalten die Symmetrien aus Tabelle 4.1 in der Zeit. Wendet man beispielsweise die Symmetrierelatio-

Phys. Größe	Symmetrie zur $xy$ -Ebene	Symmetrie zur $xz$ -Ebene
$B_x$	punktsym.	achsensym.
$B_y$	punktsym.	punktsym.
$B_z$	achsensym.	achsensym.
$v_x$	achsensym.	achsensym.
$v_y$	achsensym.	punktsym.
$v_z$	punktsym.	achsensym.
$\rho$	achsensym.	achsensym.
$p$	achsensym.	achsensym.

Tabelle 4.1: Symmetrieeigenschaften in der Wechselwirkung zwischen dem Sonnenwind und dem Dipolfeld der Erde (nach Nabert et al. 2013). Eine Größe  $u^n(x, y, z)$  ist achsensymmetrisch bezüglich der  $xy$ -Ebene, falls  $u^n(x, y, -z) = u^n(x, y, z)$  und punktsymmetrisch, falls  $u^n(x, y, -z) = -u^n(x, y, z)$ . Analoges gilt für die  $xz$ -Ebene.

nen auf die Kontinuitätsgleichung (1.23) an, zeigt sich, dass der Divergenzterm als Funktion von  $z$  achsensymmetrisch bezüglich der  $xy$ -Ebene und als Funktion von  $y$  achsensymmetrisch bezüglich der  $xz$ -Ebene ist. Daher fordert Gleichung (1.23), dass die Masendichte diese Achsensymmetrien zu jeder Zeit erfüllt. Da die initiale Situation (Sonnenwind und planetares Magnetfeld) die Symmetrierelationen erfüllt und diese Relationen in der Zeit erhalten bleiben, erfüllt auch ein stationärer Zustand die Symmetrien.

Jede physikalische Größe  $u^n(x, y, z)$  wird in eine Taylorreihe bezüglich  $y$  und  $z$  um die  $x$ -Achse entwickelt:

$$u^n(x, y, z) = \sum_{j=0}^{N_S+1} \sum_{k=0}^{N_S+1} u_{jk}^n(x) y^j z^k. \quad (4.8)$$

Hierbei bezeichnet  $(N_S + 1)$  die Entwicklungsordnung der Reihe. Wie im Folgenden zu sehen, können jedoch nur die Koeffizientenfunktionen bis zur Ordnung  $N_S$  selbstkonsistent bestimmt werden. Durch die Symmetrien fallen einige Terme aus dem Reihenentwicklungsansatz (4.8) weg und die Stagnationslinie liegt auf der  $x$ -Achse. Für Entwicklungen (4.8) mit  $N_S = 2$  ergibt sich für die physikalischen Größen folgendes:

$$\rho = \rho_0 + \rho_{20} y^2 + \rho_{02} z^2, \quad (4.9)$$

$$v_x = v_{x0} + v_{x20} y^2 + v_{x02} z^2, \quad (4.10)$$

$$v_y = v_{y10} y + v_{y12} y z^2 + v_{y30} y^3, \quad (4.11)$$

$$v_z = v_{z01} z + v_{z21} y^2 z + v_{z03} z^3. \quad (4.12)$$

$$p = p_0 + p_{20} y^2 + p_{02} z^2, \quad (4.13)$$

$$B_x = B_{x01} z + B_{x21} y^2 z + B_{x03} z^3, \quad (4.14)$$

$$B_y = B_{y11} y z, \quad (4.15)$$

$$B_z = B_{z0} + B_{z20} y^2 + B_{z02} z^2. \quad (4.16)$$

Die Reihenentwicklung ist ausschließlich bezüglich der tangentialen Richtungen  $y$  und  $z$ , sodass alle Koeffizienten von  $x$  anhängig sind. Für die  $u^n$  wurden die entsprechenden Größen aus Gleichung (1.37) verwendet. Weiterhin wurden die Terme nullter Ordnung

in  $y$  und  $z$  mit 0 anstatt 00 indiziert, um die Darstellung zu verkürzen. Die Massendichte nullter Ordnung hängt mit der Teilchendichte nullter Ordnung über  $\rho_0 = m_P N_0$  zusammen. Die Gültigkeit einer solchen Entwicklung mit  $N_S = 2$  wird in Abschnitt 4.4 genauer untersucht.

Die Bugstoßwelle und die Magnetopause lassen sich ebenfalls durch Reihenentwicklungen darstellen. Die Bugstoßwelle ist dann

$$x = \sum_{j=0}^{N_S+1} \sum_{k=0}^{N_S+1} c_{BS,jk} y^j z^k \quad (4.17)$$

und die Magnetopause ist

$$x = x_{MS} + \sum_{j=0}^{N_S+1} \sum_{k=0}^{N_S+1} c_{MP,jk} y^j z^k. \quad (4.18)$$

Hierbei bezeichnet  $x_{MS}$  den Abstand der Magnetopause entlang der Staupunktstromlinie von der Bugstoßwelle (siehe Abb. 4.2),  $c_{BS,jk}$  sind die Krümmungsparameter der Bugstoßwelle und  $c_{MP,jk}$  die Krümmungsparameter der Magnetopause.

Mithilfe der Reihenentwicklungen von Bugstoßwelle und Magnetopause kann das Koordinatensystem an diese Grenzflächen angepasst werden. Dazu wird die Koordinate  $x$  in den Entwicklungskoeffizienten der Reihenentwicklung (4.8) durch die Koordinate  $\tilde{x}$  ersetzt, also  $u_{jk}^n(x) \rightarrow u_{jk}^n(\tilde{x})$ , wobei  $\tilde{x}$  definiert ist über

$$x = \tilde{x} + \sum_{j=0}^{N_S+1} \sum_{k=0}^{N_S+1} \left( c_{BS,jk} + \Delta c_{jk} \frac{\tilde{x}}{x_{MS}} \right) y^j z^k, \quad (4.19)$$

mit  $\Delta c_{jk} := c_{MP,jk} - c_{BS,jk}$ , der Differenz zwischen Magnetopausen- und Bugstoßwellenkrümmung. Die Transformation (4.19) ergibt für  $\tilde{x} = 0$  die Parametrisierung der Bugstoßwelle (4.17) und für  $\tilde{x} = x_{MS}$  die Parametrisierung der Magnetopause (4.18). Dazwischen ist ein linearer funktionaler Zusammenhang angesetzt worden, die die Koordinate von der Bugstoßwelle zur Magnetopause hin überführt.

Durch die Ersetzung der  $x$ -Koordinate in den Entwicklungskoeffizienten von Gleichung (4.8) mit  $\tilde{x}$  folgt die Reihenentwicklung in den neuen Koordinaten:

$$u^n(x, y, z) = \sum_{j=0}^{N_S+1} \sum_{k=0}^{N_S+1} u_{jk}^n(\tilde{x}) y^j z^k. \quad (4.20)$$

Wegen der zu den Grenzflächen Bugstoßwelle und Magnetopause angepassten Koordinaten  $\tilde{x}$ ,  $y$  und  $z$  muss entlang dieser Richtungen keine Diskontinuität durchschritten werden. Dies ist ein Vorteil, weil Diskontinuitäten durch Sprungfunktionen beschrieben werden und somit Reihenentwicklungskoeffizienten hoher Ordnungen erfordern würden.

Diese allgemeinen Überlegungen vereinfachen sich durch die Symmetrierelationen der hier betrachteten Situation aus Tabelle 4.1. Die skalaren Größen Dichte und Druck sind achsensymmetrisch. Weiterhin ist der Vektor der Geschwindigkeit und der des Magnetfeldes symmetrisch bezüglich der  $x$ -Achse. Daher ist die Geometrie der Umströmungssituation ebenfalls achsensymmetrisch. Die Bugstoßwelle und die Magnetopause,

beschrieben durch die Reihenentwicklungen (4.17) beziehungsweise (4.18), haben daher nur Koeffizienten gerader Ordnung.

Beschränkt man die Entwicklung auf  $N_S = 2$ , vereinfacht sich die Reihenentwicklung der Bugstoßwelle zu

$$x = \sum_{t=y,z} c_{BS,t} t^2, \quad (4.21)$$

was der Beschreibung eines elliptischen Paraboloiden (funktionaler Zusammenhang:  $x = a_{ep} + b_{ep} y^2 + c_{ep} z^2$  mit Konstanten  $a_{ep}$ ,  $b_{ep}$  und  $c_{ep}$ ) entspricht. Hierbei ist  $c_{BS,y} := c_{BS,20}$  und  $c_{BS,z} := c_{BS,02}$ . Für die Magnetopause ergibt sich analog<sup>2</sup>

$$x = x_{MS} + \sum_{t=y,z} c_{MP,t} t^2, \quad (4.22)$$

wobei die Definitionen  $c_{MP,y} := c_{MP,20}$  und  $c_{MP,z} := c_{MP,02}$  verwendet wurden.

Mit den Symmetrieeigenschaften und einer Entwicklung mit  $N_S = 2$  vereinfacht sich Gleichung (4.19) zu

$$x = \tilde{x} + \sum_{t=y,z} \left( c_{BS,t} + \Delta c_t \frac{\tilde{x}}{x_{MS}} \right) t^2, \quad (4.23)$$

mit  $\Delta c_y := c_{MP,y} - c_{BS,y}$  und  $\Delta c_z := c_{MP,z} - c_{BS,z}$ . Die Koeffizientenfunktionen im Ansatz (4.9)–(4.16) hängen nun von  $\tilde{x}$  anstatt von  $x$  ab (z. B.  $\rho_0(x) \rightarrow \rho_0(\tilde{x})$ ). Jeder Wert für  $\tilde{x}$  beschreibt über Relation (4.23) einen elliptischen Paraboloiden. Dabei ergibt sich für  $\tilde{x} = 0$  die Parametrisierung der Bugstoßwelle (4.21) und für  $\tilde{x} = x_{MS}$  die Parametrisierung der Magnetopause (4.22). Es sei bemerkt, dass die Koordinatenersetzung von  $x$  durch  $\tilde{x}$  mit der Relation (4.23) die Symmetrie erhält, da  $\tilde{x}$  quadratisch von  $y$  und  $z$  abhängt und damit unabhängig vom Vorzeichen von  $y$  und  $z$  ist. Daher erfüllt auch der modifizierte Ansatz die Symmetrierelationen in Tabelle 4.1. Der modifizierte Ansatz beschreibt die MHD-Größen auf elliptischen Paraboloiden von der Bugstoßwelle bei  $\tilde{x} = 0$  bis hin zur Magnetopause bei  $\tilde{x} = x_{MS}$  (siehe Abb. 4.3). Der Reihenentwicklungsansatz der MHD-Größen (4.20) ist von den neuen Koordinaten  $\tilde{x}, y, z$  abhängig. Die MHD-Gleichungen dagegen sind in den kartesischen Koordinaten  $x, y, z$  dargestellt. Um Ableitungen bezüglich  $\tilde{x}$  zu erhalten, muss die Kettenregel angewandt werden, wie beispielsweise bei  $\partial_x p = \partial_{\tilde{x}} p \partial_{\tilde{x}} \tilde{x}$ . Dabei lässt sich der Faktor  $\partial_{\tilde{x}} \tilde{x}$  aus Gleichung (4.23) bestimmen:

$$\partial_{\tilde{x}} \tilde{x} = 1 - \sum_{t=y,z} \frac{\Delta c_t}{x_{MS}} t^2 + O(t^4). \quad (4.24)$$

Hierbei steht  $t^4$  für jede mögliche Kombination von  $y$  und  $z$ , die eine vierter Ordnung ergibt.

Substituiert man den mit  $\tilde{x}$  modifizierten Reihenentwicklungsansatz (4.9)–(4.16) in die stationären MHD-Gleichungen (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) und (1.29), erhält man durch Koeffizientenvergleiche ein System von gewöhnlichen Differenzialgleichungen. Für die nullte Ordnung ergibt sich

$$(\rho_0 v_{x0})' + \rho_0 (v_{y10} + v_{z01}) = 0, \quad (4.25)$$

<sup>2</sup>Die hier betrachtete parabolische Magnetopausennäherung (4.22) wird mit den analytischen Approximationen für die Krümmungsparameter  $c_{MP,y}$  und  $c_{MP,z}$  bei Liebert et al. (2016) als Referenzmagnetopause verwendet.

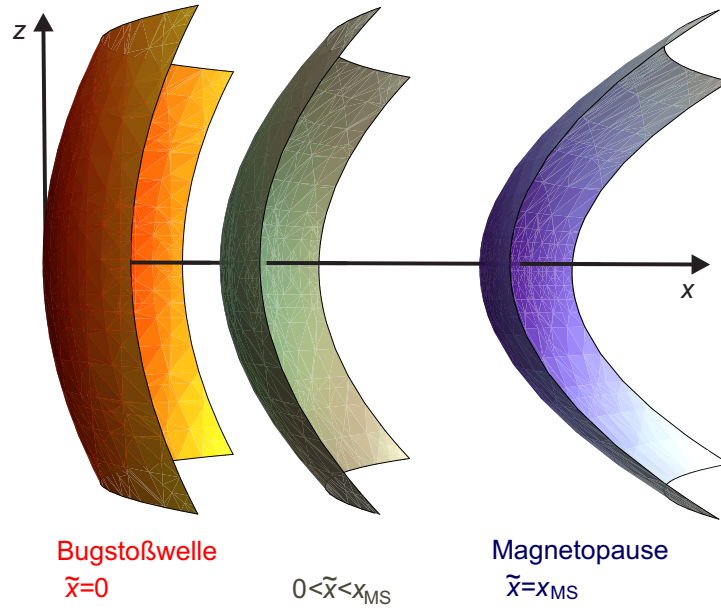


Abbildung 4.3: Dreidimensionale Darstellung der elliptischen Paraboloiden, die über Gleichung (4.23) für verschiedene  $\tilde{x}$  definiert sind (nach Nabert et al. 2013). Dabei befinden sich die Bugstoßwelle auf der linken Seite und die Magnetopause auf der rechten Seite.

$$(B_{z0} v_{x0})' + B_{z0} v_{y10} = 0, \quad (4.26)$$

$$\rho_0 v_{x0} v_{x0}' + p_0' + B_{z0} B_{z0}' - B_{x01} B_{z0} = 0, \quad (4.27)$$

$$p_0 = k \rho_0^\gamma, \quad (4.28)$$

für die erste Ordnung erhält man

$$B_{x01}' + 2B_{z02} + B_{y11} - 2\tilde{c}_z B_{z0}' = 0, \quad (4.29)$$

$$\rho_0 v_{x0} v_{y10}' + \rho_0 v_{y10}^2 + 2(p_{20} + B_{z0} B_{z20}) - B_{y11} B_{z0} - 2\tilde{c}_y (p_0' + B_{z0} B_{z0}') = 0, \quad (4.30)$$

$$\rho_0 v_{x0} v_{z01}' + \rho_0 v_{z01}^2 + 2p_{02} + B_{x01}^2 - B_{x01} B_{z0}' - 2\tilde{c}_z p_0' = 0 \quad (4.31)$$

und für die zweite Ordnung ergibt sich

$$p_{20} = k \gamma \rho_{20} \rho_0^{\gamma-1}, \quad (4.32)$$

$$p_{02} = k \gamma \rho_{02} \rho_0^{\gamma-1}, \quad (4.33)$$

$$B_{y11} v_{x0} + 2(B_{z02} v_{x0} + B_{z0} v_{x02}) - B_{x01} (v_{y10} + 2v_{z01}) + 2\tilde{c}_z B_{z0} v_{y10} = 0, \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} (\rho_0 v_{x20} + \rho_{20} v_{x0})' + \rho_0 (3v_{y30} + v_{z21}) + \rho_{20} (3v_{y10} + v_{z01}) \\ - 2\tilde{c}_y (\rho_0 v_{y10})' - \frac{\Delta c_y}{x_{MS}} (\rho_0 v_{x0})' = 0, \end{aligned} \quad (4.35)$$



$$(\rho_0 v_{x02} + \rho_{02} v_{x0})' + \rho_0 (v_{y12} + 3 v_{z03}) + \rho_{02} (v_{y10} + 3 v_{z01}) \quad (4.36)$$

$$-2 \tilde{c}_z (\rho_0 v_{z01})' - \frac{\Delta c_z}{x_{\text{MS}}} (\rho_0 v_{x0})' = 0,$$

$$(B_{x01} v_{y10} - B_{y11} v_{x0})' + 2 (B_{z02} v_{y10} + B_{z0} v_{y12}) - 2 B_{y11} v_{z01} - 2 \tilde{c}_z (B_{z0} v_{y10})' = 0, \quad (4.37)$$

$$-(B_{z0} v_{x20} + B_{z20} v_{x0})' - 3 (B_{z20} v_{y10} + B_{z0} v_{y30}) \quad (4.38)$$

$$+ 2 \tilde{c}_y (B_{z0} v_{y10})' + \frac{\Delta c_y}{x_{\text{MS}}} (B_{z0} v_{x0})' = 0,$$

$$(B_{x01} v_{z01} - B_{z0} v_{x20} - B_{z02} v_{x0})' - B_{z02} v_{y10} \quad (4.39)$$

$$- B_{z0} v_{y12} + B_{y11} v_{z01} + \frac{\Delta c_z}{x_{\text{MS}}} (B_{z0} v_{x0})' = 0,$$

$$\rho_0 (v_{x0} v_{x20})' + \rho_{20} v_{x0} v_{x0}' + 2 \rho_0 v_{x20} v_{y10} + p_{20}' + (B_{z0} B_{z20})' \quad (4.40)$$

$$- B_{x21} B_{z0} - B_{x01} B_{z20} - 2 \tilde{c}_y \rho_0 v_{y10} v_{x0}' - \frac{\Delta c_y}{x_{\text{MS}}} B_{x01} B_{z0} = 0,$$

$$\rho_0 (v_{x02} v_{x0})' + \rho_{02} v_{x0} v_{x0}' + 2 \rho_0 v_{x02} v_{z01} + p_{02}' + (B_{z0} B_{z02})' \quad (4.41)$$

$$- 3 B_{x03} B_{z0} - B_{x01} B_{z02} - 2 \tilde{c}_z (\rho_0 v_{z01} v_{x0}' - B_{z0} B_{z02}') - \frac{\Delta c_z}{x_{\text{MS}}} B_{x01} B_{z0} = 0,$$

mit  $\tilde{c}_y := c_{\text{BS},y} + \Delta c_y \frac{\tilde{x}}{x_{\text{MS}}}$  und  $\tilde{c}_z := c_{\text{BS},z} + \Delta c_z \frac{\tilde{x}}{x_{\text{MS}}}$ . Um die Darstellung der Gleichungen übersichtlicher zu gestalten, wurde  $\mu_0 = 1$  gesetzt. Ableitungen bezüglich  $\tilde{x}$  sind durch einen hochgestellten Strich angegeben, beispielsweise ist  $\rho_0' = \partial_{\tilde{x}} \rho_0$ . Die Ableitungen bezüglich  $y$  und  $z$  sind in den Koeffizientenfunktionen gemäß Ansatz (4.20) enthalten, was zum Beispiel an  $v_{y10} = \partial_y v_y(x, y, z)|_{y=z=0}$  oder  $v_{z01} = \partial_z v_z(x, y, z)|_{y=z=0}$  erkennbar ist. Das Gleichungssystem beinhaltet eine Erhaltungsgleichung (4.34), die schon durch die Randbedingungen erfüllt sein muss, da sie keine partiellen Ableitungen besitzt. Die Gleichungen (4.25)–(4.28) werden als System nullter Ordnung, die Gleichungen (4.25)–(4.31) als System erster Ordnung und die Gleichungen (4.25)–(4.41) als System zweiter Ordnung bezeichnet. Die Gleichungssysteme zusammen mit den benötigten Rand- und Schließungsbedingungen werden auch als Modell nullter, Modell erster beziehungsweise Modell zweiter Ordnung bezeichnet.

Der Reihenansatz hat die stationären MHD-Gleichungen, partielle Differenzialgleichungen (PDGLn), in ein System von gewöhnlichen Differenzialgleichungen (GDGLn) überführt. Zwar ist die Anzahl der Gleichungen im System der GDGLn größer als die Anzahl der PDGLn, jedoch ist der numerische Aufwand zum Lösen von GDGLn deutlich geringer. Für eine hinreichend kleine Entwicklungsordnung ist Aufwand zum Lösen der MHD-Gleichungen durch die GDGLn signifikant geringer. Die MHD-Gleichungen werden somit durch die Wahl einer Entwicklungsordnung ( $N_S + 1$ ) auf eine bestimmte Anzahl von GDGLn reduziert, welche die Grundlage für die in dieser Arbeit hergeleiteten reduzierten MHD-Modelle, die Reihenentwicklungsmodelle, bilden. Durch den geringeren numerischen Aufwand zum Lösen der gewöhnlichen Differenzialgleichungen ist ein

solches reduziertes MHD-Modell auch weniger anfällig für numerische Fehler, welche sich in den komplexeren Berechnungen der partiellen Differenzialgleichungen leichter aufsummieren können.

Das zuvor vorgestellte System zweiter Ordnung, besteht aus 16 GDGLn, die 22 zu bestimmende Koeffizientenfunktionen und 5 geometrische Parameter beinhalten. Daher werden zum Lösen 6 zusätzliche Schließungsbedingungen benötigt, um alle Koeffizientenfunktionen zu bestimmen sowie 5 zusätzliche Bedingungen, die die geometrischen Parameter festlegen. Weiterhin sind für alle Koeffizienten Randwerte an einem Punkt erforderlich. Diese werden direkt hinter der Bugstoßwelle über die Rankine-Hugoniot-Bedingungen (1.53)–(1.58) aus den ungestörten Sonnenwindbedingungen bestimmt. Die MHD-Gleichungen, als partielle Differenzialgleichungen, benötigen auch noch Randbedingungen in  $y$  und  $z$ -Richtung, die zum Beispiel in globalen MHD-Simulationen als Ausströmbedingungen gewählt werden (siehe Kap. 2). Mit diesen Bedingungen lassen sich die benötigten Schließungsbedingungen aufstellen. Weiterhin kann das Magnetfeld der Erde als Randbedingung genutzt werden, um die Geometrieparameter zu bestimmen.

#### 4.1.2 Randbedingungen an der Bugstoßwelle

Es werden Randwerte an einem Punkt  $\tilde{x}_0$  für alle Koeffizientenfunktionen benötigt. Dieser Punkt wird direkt hinter der Bugstoßwelle gewählt, bei  $\tilde{x}_0 = 0$ . Die zugehörigen Werte der MHD-Größen lassen sich über die Rankine-Hugoniot-Bedingungen (1.53)–(1.58) berechnen. Im Folgenden wird die Lösung der Rankine-Hugoniot-Bedingungen bezüglich der parabolischen Bugstoßwellengeometrie (4.8) hergeleitet.

Die MHD-Variablen direkt hinter der Bugstoßwelle in den Koordinaten  $\tilde{x}, y, z$  sind  $\rho(\tilde{x} = 0, y, z)$ ,  $\vec{v}(\tilde{x} = 0, y, z)$ ,  $p(\tilde{x} = 0, y, z)$  und  $\vec{B}(\tilde{x} = 0, y, z)$ . Diese lassen sich über die Rankine-Hugoniot-Bedingungen (1.53)–(1.58) mit den Sonnenwindbedingungen in diesem Modell, das sind  $\rho_{\text{SW}}$ ,  $\vec{v}_{\text{SW}} = (v_{\text{SW}}, 0, 0)^T$ ,  $p_{\text{SW}}$  und  $\vec{B}_{\text{SW}} = (0, 0, B_{\text{SW}})^T$ , lösen. Auf der Stagnationslinie werden die MHD-Größen durch die nullte Ordnung des Reihenentwicklungsansatzes (4.9)–(4.16) bestimmt. Die Strömung ist dort sowohl vor als auch hinter der Bugstoßwelle senkrecht zu dieser, mit einem Magnetfeld tangential zur Stoßwelle. Daher lässt sich die Lösung für die Koeffizienten nullter Ordnung ausdrücken durch

$$\rho_{\text{SW}} = g_{\rho} \rho_0(\tilde{x} = 0), \quad (4.42)$$

$$v_{\text{SW}} = g_v v_{x0}(\tilde{x} = 0), \quad (4.43)$$

$$p_{\text{SW}} = g_p p_0(\tilde{x} = 0), \quad (4.44)$$

$$B_{\text{SW}} = g_B B_{z0}(\tilde{x} = 0). \quad (4.45)$$

Analytische Lösungen für  $g_{\rho}$ ,  $g_p$ ,  $g_v$ ,  $g_B$ , welche über die Machzahlen von den Sonnenwindbedingungen abhängen, können zum Beispiel bei Siscoe (1983) gefunden werden. Im Grenzfall großer Machzahlen ergibt sich  $g_{\rho} = 1/4$ ,  $g_p \rightarrow 0$ ,  $g_v = 4$  und  $g_B = 1/4$ .

Zum Bestimmen der Randwerte bei  $\tilde{x} = 0$  für die Koeffizientenfunktionen höherer Ordnung muss der Bugstoßwellendurchgang neben der Stagnationslinie betrachtet werden. Dabei gilt es, die Geometrie der Bugstoßwelle zu berücksichtigen. Dazu werden zunächst krummlinige Bugstoßwellenkoordinaten eingeführt. Aus der Parametrisierung

der Bugstoßwelle (4.21) lassen sich sowohl der Normalenvektor  $\vec{\xi}_{\text{BS}}$  als auch zwei linear unabhängige tangentielle Vektoren  $\vec{\tau}_{\text{BS},1}$  und  $\vec{\tau}_{\text{BS},2}$  bezüglich der Bugstoßwelle bestimmen:

$$\vec{\xi}_{\text{BS}} = \frac{1}{n_{yz}} \left( 1, -2 c_{\text{BS},y} y, -2 c_{\text{BS},z} z \right)^T, \quad (4.46)$$

$$\vec{\tau}_{\text{BS},1} = \frac{1}{n_y} \left( 2 c_{\text{BS},y} y, 1, 0 \right)^T, \quad (4.47)$$

$$\vec{\tau}_{\text{BS},2} = \frac{1}{n_z} \left( 2 c_{\text{BS},z} z, 0, 1 \right)^T, \quad (4.48)$$

wobei  $n_{yz} := (1 + \sum_{t=y,z} 4 c_{\text{BS},t}^2 t^2)^{0.5}$ ,  $n_y := (1 + 4 c_{\text{BS},y}^2 y^2)^{0.5}$  und  $n_z := (1 + 4 c_{\text{BS},z}^2 z^2)^{0.5}$  die Vektoren normieren. Um die folgenden Berechnungen zu vereinfachen, ist es sinnvoll, den Tangentialvektor  $\vec{\tau}_{\text{BS},2}$  bezüglich der anderen Vektoren  $\vec{\xi}_{\text{BS}}$  und  $\vec{\tau}_{\text{BS},1}$  zu orthogonalisieren:

$$\vec{\tau}_{\text{BS},2} = \frac{\vec{\tau}_{\text{BS},2} - (\vec{\tau}_{\text{BS},1} \cdot \vec{\tau}_{\text{BS},2}) \vec{\tau}_{\text{BS},1}}{\left\| \vec{\tau}_{\text{BS},2} - (\vec{\tau}_{\text{BS},1} \cdot \vec{\tau}_{\text{BS},2}) \vec{\tau}_{\text{BS},1} \right\|}. \quad (4.49)$$

Die drei Koordinatenvektoren  $\vec{\xi}_{\text{BS}}$ ,  $\vec{\tau}_{\text{BS},1}$  und  $\vec{\tau}_{\text{BS},2}$  stellen ein vollständiges Orthonormalsystem an der Bugstoßwellenoberfläche dar.

Als Erstes wird die Veränderung des Geschwindigkeitsvektors durch die Bugstoßwelle untersucht. Die Geschwindigkeit hinter der Bugstoßwelle ist

$$\vec{v}(\tilde{x} = 0, y, z) = v_{\xi, \text{BS}} \vec{\xi}_{\text{BS}} + \sum_{i=1,2} v_{\tau, \text{BS}, i} \vec{\tau}_{\text{BS}, i}. \quad (4.50)$$

Im Folgenden müssen die Koeffizientenfunktionen  $v_{\xi, \text{BS}}$ ,  $v_{\tau, \text{BS},1}$  und  $v_{\tau, \text{BS},2}$  bestimmt werden. Dazu wird zunächst die  $xz$ -Ebene betrachtet. Durch Einführen des Winkels  $\alpha(z)$  (siehe Abb. 4.4) zur Parametrisierung der Bugstoßwelle lässt sich die Normalkomponente der Sonnenwindgeschwindigkeit und des Sonnenwindmagnetfeldes schreiben als

$$v_{\xi, \text{SW}} = \cos(\alpha(z)) v_{\text{SW}} \approx v_{\text{SW}}, \quad (4.51)$$

$$B_{\xi, \text{SW}} = \sin(\alpha(z)) B_{\text{SW}} \approx \alpha(z) B_{\text{SW}} \quad (4.52)$$

und die Tangentialkomponente der Sonnenwindgeschwindigkeit und des Sonnenwindmagnetfeldes als

$$v_{\tau, \text{SW}} = \sin(\alpha(z)) v_{\text{SW}} \approx \alpha(z) v_{\text{SW}}, \quad (4.53)$$

$$B_{\tau, \text{SW}} = \cos(\alpha(z)) B_{\text{SW}} \approx B_{\text{SW}}. \quad (4.54)$$

Zur Approximation wurde hierbei eine Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung in  $\alpha$  verwendet. Die Komponenten  $v_{\xi, \text{SW}}$  und  $B_{\tau, \text{SW}}$  sind nahe der Stagnationslinie (für kleine  $\alpha$ ) ungefähr konstant, wohingegen  $v_{\tau, \text{SW}}$  und  $B_{\xi, \text{SW}}$  etwa Null sind. Für Variationen der Komponenten bezüglich der Bugstoßwelle entlang der tangentialen Richtung, ausgedrückt über Ableitungen bezüglich  $\alpha$ , gilt gegenteiliges.

Die Rankine-Hugoniot-Bedingungen fordern, wegen der zu vernachlässigenden Normalkomponente des Magnetfeldes, eine stetige Tangentialkomponente der Geschwindigkeit durch die Stoßwelle (z. B. Siscoe 1983):

$$v_{\tau, \text{BS},1} = \vec{v}_{\text{SW}} \cdot \vec{\tau}_{\text{BS},1} = \frac{2 c_{\text{BS},y} v_{\text{SW}} y}{n_y}, \quad (4.55)$$

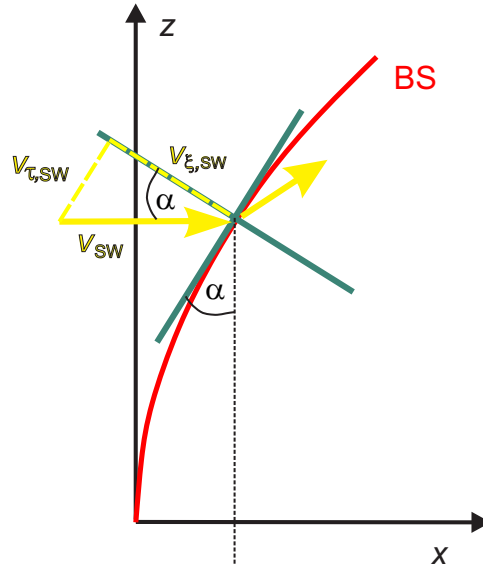


Abbildung 4.4: Projektion der Sonnenwindgeschwindigkeit bezüglich der krummlinigen Bugstoßwellenkoordinaten (nach Nabert et al. 2013). Dabei beschreibt  $\alpha$  den Winkel zwischen dem ungestörten Sonnenwind und der Normalen der Bugstoßwelle (BS).

$$v_{\tau,BS,2} = \vec{v}_{SW} \cdot \vec{\tau}_{BS,2} = \frac{2 c_{BS,z} v_{SW} z}{n_y n_{yz}}. \quad (4.56)$$

Der durch Gleichung (4.43) beschriebene Zusammenhang gilt, falls die Sonnenwindgeschwindigkeit senkrecht und das Magnetfeld tangential zur Bugstoßwelle ist. Weil das Magnetfeld nahe des subsolaren Punktes stets approximativ tangential ist, kann die Gültigkeit der Relation auf die nahe Umgebung der Stagnationslinie ausgeweitet werden, wenn die Normalkomponente der Geschwindigkeit betrachtet wird:

$$\vec{v}_{SW} \cdot \vec{\xi}_{BS} = g_v \vec{v}(\tilde{x} = 0, y, z) \cdot \vec{\xi}_{BS}. \quad (4.57)$$

Die Gleichungen (4.43), (4.46) und (4.50) für den Sonnenwind in  $x$ -Richtung führen auf

$$v_{\xi,BS} = \frac{v_{x0}(\tilde{x} = 0)}{n_{yz}}. \quad (4.58)$$

Werden die Koeffizienten (4.55), (4.56), (4.58) und die Koordinatenvektoren  $\vec{\xi}_{BS}$ ,  $\vec{\tau}_{BS,1}$ ,  $\vec{\tau}_{BS,2}$  in Gleichung (4.50) substituiert, lässt sich die durch die Stoßwelle modifizierte Geschwindigkeit schreiben als

$$\vec{v}(\tilde{x} = 0, y, z) = \frac{\Delta v}{n_{yz}} \left( v_{SW} \frac{n_{yz}}{\Delta v} - 1, 2 c_{BS,y} y, 2 c_{BS,z} z \right)^T, \quad (4.59)$$

wobei  $\Delta v := v_{SW} - v_{x0}(\tilde{x} = 0)$  ist. Das Ergebnis (4.59) gilt für die gewählte Bugstoßwellengeometrie mit den betrachteten Sonnenwindbedingungen unabhängig von Näherungen durch die Reihenentwicklungen der physikalischen Größen.

Wird Gleichung (4.59) in eine Taylorreihe bezüglich  $y$  und  $z$  um die Stagnationslinie entwickelt und werden Koeffizientenvergleiche mit dem Ansatz (4.10)–(4.12) durchgeführt, lassen sich die Koeffizientenfunktionen direkt hinter der Stoßwelle bestimmen. Zusammenfassend ergibt sich

$$v_{mij}(\tilde{x} = 0) = f_v(i, j) 2^{i+j} c_{BS,y}^i c_{BS,z}^j \Delta v, \quad (4.60)$$

mit  $m \in \{x, y, z\}$  und  $i, j$  als Indizes der Koeffizientenfunktionen nach Ansatz (4.10)–(4.12). Weiterhin ist  $f_v(i, j)$  eine das Vorzeichen bestimmende Funktion, die über

$$f_v(i, j) = \begin{cases} +1, & i + j \in \{1\} \\ -1, & i + j \in \{2, 3\} \end{cases} \quad (4.61)$$

definiert ist.

Die Koeffizienten des Magnetfeldes können auf eine ähnliche Weise berechnet werden. Dabei lassen sich die durch die Stoßwelle modifizierten Werte wie folgt ausdrücken:

$$\vec{B}(\tilde{x} = 0, y, z) = B_{\xi,BS} \vec{\xi}_{BS} + \sum_{i=1,2} B_{\tau,BS,i} \vec{\tau}_{BS,i}. \quad (4.62)$$

Aufgrund der Divergenzfreiheit des Magnetfeldes ist seine Normalkomponente stets stetig an der Stoßwelle. Dies ergibt

$$B_{\xi,BS} = \frac{-2 B_{SW} c_{BS,z} z}{n_{yz}}. \quad (4.63)$$

Wie bei den Berechnungen der Geschwindigkeit zuvor wird die Gültigkeit der Beziehung (4.45) auf eine Umgebung um die Stagnationslinie ausgeweitet:

$$\vec{B}_{SW} \cdot \vec{\tau}_{BS,i} = g_B \vec{B}(\tilde{x} = 0, y, z) \cdot \vec{\tau}_{BS,i} \quad \text{für } i \in \{1, 2\}. \quad (4.64)$$

Da das Sonnenwindmagnetfeld entlang der  $z$ -Richtung gewählt wurde, ergeben die Gleichungen (4.45), (4.47), (4.49) und (4.62) für die tangentialen Koeffizienten

$$B_{\tau,BS,1} = 0, \quad (4.65)$$

$$B_{\tau,BS,2} = \frac{B_{z0}(0) n_y}{n_{yz}}. \quad (4.66)$$

Daraus lässt sich das Magnetfeld direkt hinter der Stoßwelle bestimmen:

$$\vec{B}(\tilde{x} = 0, y, z) = \frac{\Delta B}{n_{yz}^2} \left( 2 c_{BS,z} z, -4 c_{BS,y} c_{BS,z} y z, \frac{B_{z0}(0) + 4 B_{SW} c_{BS,y}^2 y^2 + 4 B_{SW} c_{BS,z}^2 z^2}{\Delta B} \right)^T, \quad (4.67)$$

wobei  $\Delta B := B_{SW} - B_{z0}(\tilde{x} = 0)$  ist.

Die Randwerte der Koeffizientenfunktionen des Magnetfeldes ergeben sich über Ableitungen des Ansatzes (4.14)–(4.16) zusammen mit Gleichung (4.67) bei  $(\tilde{x} = 0, y = 0, z = 0)$ :

$$B_{mij}(0) = f_B(i, j) 2^{i+j} c_{BS,y}^i c_{BS,z}^j \Delta B, \quad (4.68)$$

mit  $m \in \{x, y, z\}$  und  $i, j$  als Indizes der Koeffizientenfunktionen nach Ansatz (4.14)–(4.16) und

$$f_B(i, j) = \begin{cases} +1, & i + j \in \{1, 2\} \\ -1, & i + j \in \{3\} \end{cases}. \quad (4.69)$$

Gleichung (4.60) und (4.68) erfüllen auch die Erhaltungsgleichung des Theorems des eingefrorenen Flusses (4.34). Unter den in den Rechnungen zuvor verwendeten Approximationen sind die Randwerte für die Dichte- und Druckkoeffizientenfunktionen  $\rho_{20} = \rho_{02} = p_{20} = p_{02} = 0$ .

### 4.1.3 Schließungsbedingungen

Das System der stationären MHD-Gleichungen beinhaltet Ableitungen bezüglich aller drei Raumrichtungen. Somit werden Randbedingungen in drei linear unabhängigen Ebenen benötigt. Die zuvor berechneten Randbedingungen direkt hinter der Bugstoßwelle sind vergleichbar mit den Einströmbedingungen einer MHD-Simulation (siehe Kap. 2) und werden aus Sonnenwindbedingungen gewonnen. Es verbleibt, die Ausströmbedingungen zu betrachten und damit das System aus gewöhnlichen Differenzialgleichungen zu schließen. Weit weg von der Stagnationslinie wird die Lösung durch die Koeffizientenfunktionen der höchsten Ordnung bestimmt. Beispielsweise gilt bei Verwendung des Ansatzes (4.9)–(4.16)  $\rho(\tilde{x}, y \rightarrow \infty, z \rightarrow \infty) \approx \rho_{20}(\tilde{x})y^2 + \rho_{02}(\tilde{x})z^2$ . Als Schließungsbedingungen werden die Koeffizientenfunktionen der höchsten Ordnung als konstant angenommen mit Werten für die Koeffizientenfunktionen direkt hinter der Bugstoßwelle. Diese Bedingungen sind ähnlich zu den Ausströmbedingungen in den MHD-Simulationen aus Kapitel 2.

### 4.1.4 Innere Randbedingungen durch das Erdmagnetfeld

Neben den Randwerten und Schließungsbedingungen erfordert das System von gewöhnlichen Differenzialgleichungen noch weitere Bedingungen, um die fünf geometrischen Parameter  $c_{BS,y}$ ,  $c_{BS,z}$ ,  $c_{MP,y}$ ,  $c_{MP,z}$  und  $x_{MS}$  zu bestimmen. Diese Parameter werden durch innere Randbedingungen festgelegt.

Die Magnetopause ist im Rahmen der idealen MHD die Grenzschicht zwischen dem umströmenden Sonnenwindplasma und dem Plasma der Magnetosphäre. Daher muss die Strömung an der Magnetopause tangential zu ihr sein und darf die Grenzschicht nicht durchdringen (siehe z. B. Biernat et al. 1999). Die Strömungsrichtung an der Magnetopause lässt sich durch Oberflächenkoordinaten ausdrücken. Der Normalenvektor der Magnetopause kann über die Parametrisierung (4.22) bestimmt werden:

$$\vec{\xi}_{MP} = \frac{1}{n_{MP}} \left( 1, -2 c_{MP,y} y, -2 c_{MP,z} z \right)^T, \quad (4.70)$$

mit der Normierung  $n_{MP} := (1 + \sum_{t=y,z} 4 c_{MP,t}^2 t^2)^{0.5}$ . Da die Magnetopause eine Grenzfläche der Strömung darstellt, muss die Normalkomponente der Geschwindigkeit dort Null sein. Daraus folgt

$$\vec{\xi}_{MP} \cdot \vec{v}(\tilde{x} = x_{MS}, y, z) = 0. \quad (4.71)$$

Dieser Ausdruck gilt sowohl für die  $y$ - als auch für die  $z$ -Richtung, sodass sich für den Ansatz der Geschwindigkeit (4.10)–(4.12) folgendes ergibt:

$$v_{x0}(\tilde{x} = x_{\text{MS}}) = 0, \quad (4.72)$$

$$c_{\text{MP},y} = \frac{v_{x20}(\tilde{x} = x_{\text{MS}})}{2 v_{y10}(\tilde{x} = x_{\text{MS}})}, \quad (4.73)$$

$$c_{\text{MP},z} = \frac{v_{x02}(\tilde{x} = x_{\text{MS}})}{2 v_{z01}(\tilde{x} = x_{\text{MS}})}. \quad (4.74)$$

Wie Siscoe et al. (2002) zeigen, verschwindet die Strömungsgeschwindigkeit entlang der Magnetfeldrichtung an der Magnetopause, also gilt  $v_{z01}(\tilde{x} = x_{\text{MS}}) = 0$ . Daher ist für ein endliches Sonnenwindmagnetfeld Gleichung (4.74) nicht gültig. Das Theorem des eingefrorenen Flusses besagt, dass sich Magnetfeldlinien verschiedenen Ursprungs nicht vermischen. Daher muss die Normalkomponente des Magnetfeldes an der Magnetopause Null werden, weshalb  $\vec{\xi}_{\text{MP}} \cdot \vec{B}(\tilde{x} = x_{\text{MS}}, y, z) = 0$  gilt (siehe z. B. Biernat et al. 1999). Dies führt auf

$$c_{\text{MP},z} = \frac{B_{x01}(\tilde{x} = x_{\text{MS}})}{2 B_{z0}(\tilde{x} = x_{\text{MS}})}, \quad (4.75)$$

was Gleichung (4.74) ersetzt.

Es fehlen noch Bedingungen, die das Erdmagnetfeld selbst miteinbeziehen. Das Magnetfeld der MHD-Lösung  $\vec{B}$  ist eine Superposition von dem Magnetfeld der Ströme in der Magnetosheath  $\vec{B}_j$ , dem Erdmagnetfeld  $\vec{B}_E$  und dem Sonnenwindmagnetfeld  $\vec{B}_{\text{SW}}$ . Weitere Quellen, wie Beiträge von Induktionsströmen, sind bei der Erde vernachlässigbar. Das Erdmagnetfeld ist, durch Gleichung (4.5)–(4.7) beschrieben, rotationsfrei. Damit lässt sich der elektrische Strom in der Magnetosheath  $\vec{j}_{\text{MS}}$  berechnen über

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times \vec{B}_j = \mu_0 \vec{j}_{\text{MS}}. \quad (4.76)$$

Das zugehörige Magnetfeld der Magnetosheathströme ist dann über das Biot-Savart-Gesetz bestimmt:

$$\vec{B}_j = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_{\text{MS}}} \vec{j}_{\text{MS}} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'. \quad (4.77)$$

Hierbei wird die Integration über die gesamte Magnetosheath  $V_{\text{MS}}$  mit den zugehörigen Positionsvektoren  $\vec{r} := (x, y, z)^T$ ,  $\vec{r}' := (x', y', z')^T$  in kartesischen Koordinaten durchgeführt. Damit ergibt sich die folgende Bedingung:

$$\vec{B} \stackrel{!}{=} \vec{B}_{\text{SW}} + \vec{B}_E + \vec{B}_j, \quad (4.78)$$

welche das Gesamtmagnetfeld erfüllen muss.

Eine einfache Näherung dieser Bedingung erhält man durch eine Betrachtung des Druckgleichgewichts an der Magnetopause. Mead und Beard (1964) wiesen darauf hin, dass die tangentialen Komponenten des Magnetfeldes  $\vec{B}_E + \vec{B}_j$  den gesamten Druck hinter der Magnetopause  $p_{\text{tot,MP}}$  bestimmen:

$$p_{\text{tot,MP}} = \frac{(\vec{\xi}_{\text{MP}} \times (\vec{B}_E + \vec{B}_j))^2}{2\mu_0}. \quad (4.79)$$

Nach Mead und Beard (1964) lässt sich die rechte Seite gut approximieren durch

$$p_{\text{tot,MP}} = \frac{(f \vec{B}_E \times \vec{\xi}_{\text{MP}})^2}{2\mu_0}, \quad (4.80)$$

mit  $f = 2.44$ . Diese Darstellung ist für den hydrodynamischen Grenzfall korrekt und approximiert auch eine Situation mit endlichem Sonnenwindmagnetfeld in der Regel gut. Der Ausdruck (4.80) bestimmt den Abstand der Magnetopause zum Erdmittelpunkt und gilt nicht nur nahe der Stagnationslinie, sondern auch in einer Umgebung um diese. Daher ergeben sich über Variationen in  $y$ - beziehungsweise  $z$ -Richtung zusätzliche Bedingungen, um zwei der Krümmungsparameter zu bestimmen.

Insgesamt lassen sich durch die Bedingungen einer verschwindenden Normalkomponente der Geschwindigkeit beziehungsweise des Magnetfeldes sowie den Bedingungen, die aus dem Erdmagnetfeld her resultieren, die geometrischen Parameter  $x_{\text{MS}}$ ,  $c_{\text{MP},y}$ ,  $c_{\text{MP},z}$ ,  $c_{\text{BS},y}$  und  $c_{\text{BS},z}$  berechnen. Die Differenzialgleichungen zusammen mit den Schließungsbedingungen für die Koeffizienten der höchsten Ordnung und den hier vorgestellten Randbedingungen bestimmen eine eindeutige Lösung der Magnetosheath für gegebene Sonnenwindbedingungen. Das System von Differenzialgleichungen, welches sich für ein bestimmtes  $N_S$  ergibt, zusammen mit den Rand- und Schließungsbedingungen, wird auch als Reihenentwicklungsmodell  $N_S$ -ter Ordnung bezeichnet.

## 4.2 Analytische Näherung der Umströmung<sup>3</sup>

### 4.2.1 Allgemeine Lösung des Systems nullter Ordnung

Die zugehörigen Gleichungen nullter Ordnung (4.25)–(4.28) enthalten bereits eine approximative Beschreibung der Umströmung nahe der Stagnationslinie. Um einen Einblick in die wichtigen physikalischen Prozesse der Magnetosheath und die Lösungen der Reihenentwicklungsmodelle zu bekommen, wird eine approximative, analytische Lösung für die Gleichungen berechnet. Dabei werden die Koeffizientenfunktionen der ersten Ordnung als konstant angenommen und auf die Werte direkt hinter der Bugstoßwelle gesetzt:  $B_{x01} = B_{x01}(\tilde{x} = 0)$ ,  $v_{y10} = v_{y10}(\tilde{x} = 0)$  und  $v_{z01} = v_{z01}(\tilde{x} = 0)$ . Die letzten beiden Ausdrücke beschreiben die Geschwindigkeitsänderung in die tangentialen Richtungen und werden als Divergenzparameter bezeichnet.

Um die Betrachtungen zu vereinfachen, wird die Scherung des Magnetfeldes vernachlässigt, das heißt das Magnetfeld ist auf die  $z$ -Richtung beschränkt und damit gilt  $B_{x01}(\tilde{x} = 0) = 0$ . Die Bugstoßwelle komprimiert und bremst den Sonnenwind. Dabei wird dynamischer Druck in Gasdruck und magnetischen Druck umgewandelt. In der Regel können hinter der Bugstoßwelle Terme des dynamischen Drucks in der Impulsbilanz der nullten Ordnung (4.27) vernachlässigt werden. Der Einfluss dieser Näherung wird in Kapitel 4.4 genauer diskutiert. Durch die Approximationen vereinfacht sich die Impulsbilanz

---

<sup>3</sup>Die analytische Näherung, so wie in diesem Kapitel beschrieben, ist in Nabert et al. (2013) zu finden. Dabei ist die analytische Näherung als eigenständiges Modell, ohne die Einbettung in die Reihenentwicklungsmethode, in Teilen auch bei Nabert (2011) zu finden.



der nullten Ordnung (4.27) zu

$$k_p (\rho_0^\gamma)' + \frac{1}{\mu_0} B_{z0} B_{z0}' = 0. \quad (4.81)$$

Hierbei wurde der Druck durch das adiabatische Gesetz der nullten Ordnung (4.28) ersetzt. Durch Integration dieser Gleichung über  $\tilde{x}$  erhält man

$$k_p (\rho_0^\gamma) + \frac{B_{z0}^2}{2\mu_0} = k_p \rho_0(0)^\gamma + \frac{B_{z0}(0)^2}{2\mu_0}, \quad (4.82)$$

mit der Integrationskonstanten auf der rechten Seite, die direkt hinter der Bugstoßwelle zu bestimmen ist. Die nullte Ordnung der Kontinuitätsgleichung (4.25) sowie die nullte Ordnung des Theorems des eingefrorenen Flusses (4.26) können geschrieben werden als

$$v_{x0}' = -(v_{y10} + v_{z01}) + \epsilon_\rho, \quad (4.83)$$

$$v_{x0}' = -v_{y10} - \epsilon_B, \quad (4.84)$$

wobei  $\epsilon_\rho := -v_{x0} \partial_x \rho_0 / \rho_0$  und  $\epsilon_B := v_{x0} \partial_x B_{z0} / B_{z0}$  ist. Das nordwärtige Magnetfeld und die Dichte sind stets Funktionen mit Werten größer Null. Weiterhin sind  $\epsilon_\rho$  und  $\epsilon_B$  stets positiv, weil das Magnetfeld in der Magnetosheath zur Magnetopause hin ansteigt, was nach Gleichung (4.81) eine abfallende Dichte zur Folge hat. Zusammen mit den Gleichungen (4.83) und (4.84) lässt sich durch

$$-(v_{y10} + v_{z01}) < v_{x0}' < -v_{y10} \quad (4.85)$$

eine obere und eine untere Grenze für die Geschwindigkeitsänderung angeben.

Die Geschwindigkeit  $v_{x0}$  kann in eine Reihe um  $\tilde{x} = 0$  entwickelt werden:

$$v_{x0} = v_{x0}(0) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \tilde{x}^i. \quad (4.86)$$

Bemerkt sei, dass das Argument der Koeffizientenfunktionen  $\tilde{x}$  ist, sodass  $v_{x0}(0) := v_{x0}(\tilde{x} = 0)$  bedeutet. Im Folgenden wird das Argument  $\tilde{x}$  nicht weiter aufgeführt. Berücksichtigt man nur die erste Ordnung der Entwicklung in  $\tilde{x}$ , folgt

$$v_{x0} = v_{x0}(0) + a \tilde{x}. \quad (4.87)$$

Hierbei wurde der Entwicklungskoeffizient  $a := a_1$  abgekürzt. Eine obere Abschätzung des Fehlers für die lineare Näherung lässt sich über Bedingung (4.85) bestimmen. Ein nahezu linearer Abfall der Geschwindigkeit von der Bugstoßwelle entlang der Staupunktstromlinie wird auch von globalen MHD-Simulationen, wie beispielsweise bei Wu (1992) oder Wang et al. (2004), vorhergesagt. Im hydrodynamischen Grenzfall ist die Dichte nach Gleichung (4.81) konstant entlang der Staupunktstromlinie. Dies führt auf  $\epsilon_\rho = 0$  und damit auf einen linearen Geschwindigkeitsabfall mit  $a = -v_{y10} - v_{z01}$ . Wird der Ansatz für die Geschwindigkeit (4.87) in die Kontinuitätsgleichung nullter Ordnung (4.25) und das Theorem des eingefrorenen Flusses nullter Ordnung (4.26) eingesetzt, ergibt sich

$$\rho_0 = \rho_0(0) \left( \frac{v_{x0}}{v_{x0}(0)} \right)^{-\frac{v_{y10} + v_{z01} + a}{a}}, \quad (4.88)$$

$$B_{z0} = B_{z0}(0) \left( \frac{v_{x0}}{v_{x0}(0)} \right)^{-\frac{v_{y10}+a}{a}}. \quad (4.89)$$

Durch Substituieren dieser Ergebnisse in die vereinfachte Impulsbilanz (4.82) lässt sich eine Bestimmungsgleichung für den Entwicklungskoeffizient  $a$  aufstellen:

$$k_p \left( \rho_0(0) \left( \frac{v_{x0}}{v_{x0}(0)} \right)^{-\frac{v_{y10}+v_{z01}+a}{a}} \right)^\gamma + \frac{1}{2\mu_0} \left( B_{z0}(0) \left( \frac{v_{x0}}{v_{x0}(0)} \right)^{-\frac{v_{y10}+a}{a}} \right)^2 = k_p \rho_0(0)^\gamma + \frac{B_{z0}(0)^2}{2\mu_0}. \quad (4.90)$$

Um diese Gleichung für den Koeffizienten  $a$  zu lösen, werden beide Seiten in eine Taylorreihe um  $\tilde{x} = 0$  entwickelt. Aus einem Koeffizientenvergleich der niedrigsten, nicht-verschwindenden Ordnung ergibt sich  $a$  zu

$$a = -v_{y10} - v_{z01} \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{2} \frac{p_0(0)}{p_{\text{mag}}(0)}} \right). \quad (4.91)$$

Hierbei definiert  $p_{\text{mag}}(0) := B_{z0}^2(0)/2\mu_0$  den magnetischen Druck direkt hinter der Bugstoßwelle.

Das Ergebnis für den Geschwindigkeitsabfall entlang der Staupunktstromlinie kann genutzt werden, um die Dicke der Magnetosheath  $x_{\text{MS}}$  zu berechnen. Die Magnetopause wird hier über eine verschwindende Strömungsgeschwindigkeit auf der Stagnationslinie definiert ( $v_x(x_{\text{MS}}) = 0$ ). Es folgt für Gleichung (4.87) die Beziehung

$$x_{\text{MS}} = \frac{v_{x0}(0)}{a}. \quad (4.92)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (4.91) für  $a$  erhält man

$$x_{\text{MS}} = \frac{-v_{x0}(0)}{v_{y10} + m_{\text{BS}} v_{z01}}, \quad (4.93)$$

mit

$$m_{\text{BS}} := 1 - \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{2} \frac{p_0(0)}{p_{\text{mag}}(0)}}. \quad (4.94)$$

Der Parameter  $m_{\text{BS}}$  stellt ein Maß für die Magnetisierung des Sonnenwinds dar. Für ein verschwindendes Sonnenwindmagnetfeld ist  $m_{\text{BS}} = 1$ .

Der Ausdruck für die Dicke der Magnetosheath  $x_{\text{MS}}$  wurde aus den Gleichungen der idealen MHD unter Vernachlässigung der magnetischen Scherung und der dynamischen Druckterme über eine Entwicklung der Geschwindigkeit ( $\vec{v} = (v_{x0}(0) + a\tilde{x}, v_{y01}(0)y, v_{z10}(0)z)^T$ ) berechnet. Beiträge höherer Ordnung der Geschwindigkeitsentwicklung zur Dicke der Magnetosheath können ebenfalls berechnet werden. Für einen Ansatz zweiter Ordnung für die Geschwindigkeit in  $\tilde{x}$  nach Gleichung (4.87) führt eine ähnliche Rechnung wie zuvor auf den zugehörigen Entwicklungskoeffizienten zweiter Ordnung:

$$a_2 = \frac{2\gamma^2 p_{\text{mag}}(0) p_0(0) (p_{\text{mag}}(0) + p_0(0)) v_{z01}^2}{(2p_{\text{mag}}(0) + \gamma p_0(0))^3 v_{x0}(0)}. \quad (4.95)$$

Für den Grenzfall  $p_0(0) \gg p_{\text{mag}}(0)$  vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$a_2 \approx 2\gamma \frac{p_{\text{mag}}(0)}{p_0(0)} \frac{v_{z01}^2}{v_{x0}(0)}. \quad (4.96)$$

Im hydrodynamischen Grenzfall ( $p_{\text{mag}}(0) = 0$ ) ist  $a_2 = 0$  und ein linearer Geschwindigkeitsabfall verbleibt.

### 4.2.2 Randbedingungen des Modells nullter Ordnung

Im Folgenden werden die Randbedingungen eingearbeitet. Gemäß der Schließungsbedingungen sind die Divergenzparameter  $v_{y10}$  und  $v_{z01}$  Konstanten mit Werten, die sich direkt hinter der Bugstoßwelle ergeben. Diese Werte sind durch Gleichung (4.60) bestimmt zu

$$v_{y10} = 2 c_{\text{BS},y} \Delta v, \quad (4.97)$$

$$v_{z01} = 2 c_{\text{BS},z} \Delta v. \quad (4.98)$$

Der dynamische Druck des Sonnenwinds wird zur Magnetopause hin vollständig in Gasdruck und magnetischen Druck umgewandelt. Allerdings ist der Druck dabei keine Erhaltungsgröße, weshalb sich der Sonnenwinddruck um den Faktor  $K_{\text{dyn}}$  vom Druck an der Magnetopause auf der Stagnationslinie unterscheidet:

$$K_{\text{dyn}} \rho_{\text{SW}} v_{\text{SW}}^2 = p_{\text{tot,MP}}. \quad (4.99)$$

Für die hier betrachtete Situation der Umströmung bei der Erde gilt  $K_{\text{dyn}} \approx 0.89$  für typische Sonnenwindbedingungen (Kivelson und Russell 1995). Der gesamte Druck an der Magnetopause  $p_{\text{tot,MP}}$  ist durch Gleichung (4.80) bestimmt. Der Ausdruck für das Druckgleichgewicht (4.99) besitzt nur am Stagnationspunkt ( $\tilde{x} = x_{\text{MS}}, y = 0, z = 0$ ) Gültigkeit. In einer Umgebung um diesen ist nur die Normalkomponente der Geschwindigkeit bezüglich der Magnetopausenfläche maßgeblich. Bezüglich der Magnetopausennormalen (4.70) ergibt sich für den Anteil des dynamischen Drucks

$$p_{\text{dyn},\xi} = \rho_{\text{SW}} v_{\text{SW},\xi}^2 = \rho \frac{v_{\text{SW}}^2}{n_{\text{MP}}^2}. \quad (4.100)$$

Diese Gleichung gilt sowohl in  $y$ - als auch in  $z$ -Richtung. Damit lässt sich das Druckgleichgewicht schreiben als

$$K_{\text{dyn}} p_{\text{dyn},\xi} = p_{\text{tot,MP}}. \quad (4.101)$$

Für  $K_{\text{dyn}} = 1$  ist die Druckbilanz äquivalent zu der von Mead und Beard (1964) angegebenen Druckbilanz.

Der magnetosphärische Druck (4.80) in der  $xy$ -Ebene lässt sich mit der Parametrisierung der Magnetopause (4.22), dem Dipolfeld der Erde (4.5)–(4.7) und dem Normalenvektor an der Magnetopause (4.70) bestimmen zu

$$p_{\text{tot,MP},xy} = \frac{1}{\left((\Delta x_{\text{MP}} - c_{\text{MP},y} y^2)^2 + y^2\right)^3} \frac{f^2 M^2}{2\mu_0}. \quad (4.102)$$

Wird dieser Ausdruck für  $p_{\text{tot,MP}}$  in Gleichung (4.99) eingesetzt, ergibt sich der Magnetopausenabstand  $\Delta x_{\text{MP}}$  am Stagnationspunkt ( $y = 0$ ) und man erhält die häufig verwendete Beziehung (siehe z. B. Pudovkin et al. 1998)

$$\Delta x_{\text{MP}} = \left( \frac{f^2 M^2}{2 \mu_0 K_{\text{dyn}} \rho_{\text{SW}} v_{\text{SW}}^2} \right)^{\frac{1}{6}}. \quad (4.103)$$

Die allgemeine Druckbilanz (4.101) mit Gleichung (4.100) und Gleichung (4.102) für  $p_{\text{tot,MP}} \leftarrow p_{\text{tot,MP,xy}}$  stellt eine Bestimmungsgleichung für  $c_{\text{MP,y}}$  dar. Um diese zu lösen, werden beide Seiten in eine Taylorreihe bis zur zweiten Ordnung bezüglich  $y$  um die Stagnationslinie entwickelt. Durch einen Koeffizientenvergleich lässt sich dann die Krümmung der Magnetopause bestimmen:

$$c_{\text{MP,y}} = \frac{-3 + \sqrt{21}}{4 \Delta x_{\text{MP}}} \approx \frac{0.4}{\Delta x_{\text{MP}}}. \quad (4.104)$$

Um den parabolischen Koeffizienten der Bugstoßwelle  $c_{\text{BS,y}}$  abzuschätzen, wird angenommen, dass der Koeffizient der Bugstoßwelle  $c_{\text{BS,y}}$  denselben funktionalen Zusammenhang wie der Koeffizient der Magnetopausenkrümmung  $c_{\text{MP,y}}$  besitzt:

$$c_{\text{BS,y}} = \frac{0.4}{\Delta x_{\text{BS}}}. \quad (4.105)$$

Dabei ist  $\Delta x_{\text{BS}} := \Delta x_{\text{MP}} + x_{\text{MS}}$  der Bugstoßwellenabstand vom Erdmittelpunkt. Der Divergenzparameter  $v_{y10}$  ist dann mit Gleichung (4.97) durch

$$v_{y10} = 0.8 \frac{v_{\text{SW}} - v_{x0}(0)}{\Delta x_{\text{BS}}} \quad (4.106)$$

bestimmt.

Es verbleibt die Geschwindigkeitsdivergenz in der  $xz$ -Ebene zu bestimmen. Wird Gleichung (4.80) zusammen mit der Parametrisierung der Magnetopause (4.22) verwendet, um den magnetosphärischen Druck in der  $xz$ -Ebene zu beschreiben, ergibt sich

$$p_{\text{tot,MP,xz}} = \frac{\left( 2 z^2 - (\Delta x_{\text{MP}} - c_{\text{MP,z}} z^2)^2 - 6 c_{\text{MP,z}} (\Delta x_{\text{MP}} - c_{\text{MP,z}} z^2) z^2 \right)^2 f^2 M^2}{\left( 1 + 4 c_{\text{MP,z}}^2 z^2 \right) \left( (\Delta x_{\text{MP}} - c_{\text{MP,z}} z^2)^2 + z^2 \right)^5} \frac{f^2 M^2}{2 \mu_0}. \quad (4.107)$$

Analog zur Betrachtung des Druckgleichgewichts in der  $xy$ -Ebene, lässt sich über eine Betrachtung des Druckgleichgewichts in der  $xz$ -Ebene der Krümmungsparameter der Magnetopause  $c_{\text{MP,z}}$  bestimmen. Es ergibt sich

$$c_{\text{MP,z}} = \frac{1}{2 \Delta x_{\text{MP}}}. \quad (4.108)$$

Wird derselbe funktionale Zusammenhang auch für die Bugstoßwellenkrümmung angenommen, ist

$$c_{\text{BS,z}} = \frac{1}{2 \Delta x_{\text{BS}}}. \quad (4.109)$$

Mit Gleichung (4.98) folgt für den Divergenzparameter

$$v_{z01} = \frac{v_{\text{SW}} - v_{x0}(0)}{\Delta x_{\text{BS}}}. \quad (4.110)$$

In den zuvor gezeigten Rechnungen wurden Schätzer für die Divergenzparameter  $v_{y10}$  und  $v_{z01}$  in Gleichung (4.106) beziehungsweise Gleichung (4.110) hergeleitet. Der Zähler in diesen Ausdrücken ist durch den Sprung in der Geschwindigkeit an der Stoßwelle und der Nenner ist durch den Abstand der Bugstoßwelle zum Mittelpunkt der Erde bestimmt. Das Verhältnis der beiden Divergenzparameter ist durch

$$v_{y10} = \frac{4}{5} v_{z01} \quad (4.111)$$

gegeben. Dabei rührt der Faktor  $4/5$  von der unterschiedlichen Form des Dipolmagnetfeldes in  $y$ - und  $z$ -Richtung her.

Die Gleichungen für die Divergenzparameter hängen noch von der Dicke der Magnetosheath ab. Mit den Gleichungen (4.43), (4.93), (4.106) und (4.110) erhält man

$$x_{\text{MS}} = \frac{\Delta x_{\text{MP}}}{\left(\frac{4}{5} + m_{\text{BS}}\right)(g_v - 1) - 1}. \quad (4.112)$$

Dieser Ausdruck für die Dicke der Magnetosheath hängt nur noch von den Sonnenwindbedingungen ab. Der Sprung in der Geschwindigkeit  $g_v$  (über Gl. (4.43)), der Abstand der Magnetopause vom Mittelpunkt der Erde  $\Delta x_{\text{MP}}$  (über Gl. (4.103)) und die Sonnenwindmagnetisierung  $m_{\text{BS}}$  (über Gl. (4.94)) sind allesamt Funktionen der Sonnenwindparameter. Dabei können durch die Gleichungen (4.42)–(4.45) die Randwerte  $\rho_0(0)$ ,  $p_0(0)$ ,  $B_{z0}(0)$  und  $v_{x0}(0)$  auf die Sonnenwindbedingungen zurückgeführt werden. Daher lassen sich auch Gleichung (4.106) und Gleichung (4.110) als explizite Funktionen der Sonnenwindparameter schreiben.

In der Darstellung (4.112) ist die Dicke der Magnetosheath proportional zum Abstand der Magnetopause vom Erdmittelpunkt. Ein typischer Wert Abstand der Magnetopause liegt bei  $10 R_E$ . Im hydrodynamischen Grenzfall ( $m_{\text{BS}} = 1$ ) führt dies zu einer Dicke der Magnetosheath von  $2.3 R_E$  für große Machzahlen ( $g_v = 4$ ). Mit größerem Sonnenwindmagnetfeld nimmt die Dicke der Magnetosheath zu. Im Grenzfall kleiner Machzahlen kann die Dicke nach Gleichung (4.112) auch negativ werden kann. Daraus lässt sich schließen, dass die Näherungen in der Herleitung für diesen Grenzfall nicht mehr gültig sind.

Oftmals findet die folgende, für hydrodynamische Betrachtungen gültige, empirische Beziehung für die Dicke der Magnetosheath von Spreiter et al. (1966) Verwendung:

$$x_{\text{MS}} = 1.1 \frac{1}{g_v} \Delta x_{\text{MP}}. \quad (4.113)$$

Diese Gleichung besitzt dieselbe Proportionalität zwischen Magnetosheathdicke und Magnetopausenabstand wie die zuvor hergeleitete Beziehung (4.112). Farris und Russell (1994) modifizierten die Beziehung von Spreiter et al. (1966) und erhielten

$$x_{\text{MS}} = 1.1 \frac{(\gamma - 1) M_{\text{i,SW}}^2 + 2}{(\gamma + 1) (M_{\text{i,SW}}^2 - 1)} \Delta x_{\text{MP}}, \quad (4.114)$$

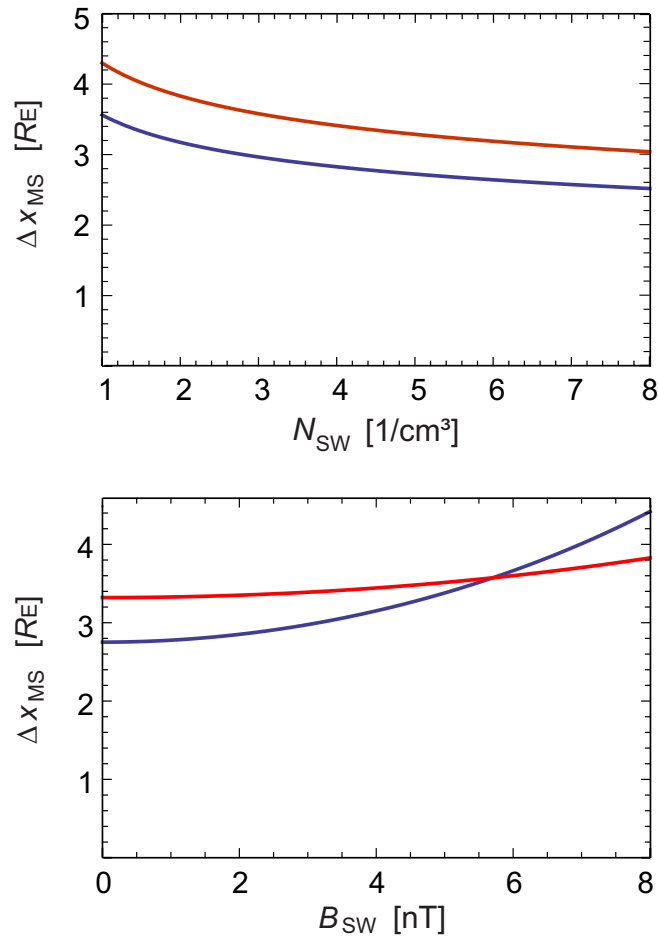


Abbildung 4.5: Vergleich der Dicke der Magnetosheath bestimmt über die analytische Lösung aus Gleichung (4.112) als blaue Kurven mit der des empirischen Modells von Farris und Russell (1994) als rote Kurven (nach Nabert et al. 2013). Der obere Plot zeigt die Dichteabhängigkeit der Magnetosheathdicke für  $v_{SW} = 400$  km/s,  $T_{SW} = 2 \cdot 10^5$  K und  $B_{SW} = 0$  nT. Der untere Plot stellt die Abhängigkeit vom Magnetfeld für  $v_{SW} = 400$  km/s,  $T_{SW} = 2 \cdot 10^5$  K und  $N_{SW} = 5$  /cm<sup>3</sup> dar.

wobei  $M_{1,SW}$  die magnetosonische Machzahl des Sonnenwindes ist (siehe auch Bennett et al. 1997). Abbildung 4.5 zeigt einen Vergleich dieser Relation von Farris und Russell (1994) mit der hier hergeleiteten Beziehung (4.112). Der obere Teil der Abbildung zeigt die Dicke der Magnetosheath als Funktion der Teilchendichte für einen nicht-magnetisierten Sonnenwind. Beide Beziehungen sind sehr ähnlich, weisen aber einen kleinen Versatz von etwa 20% auf. Im unteren Teil der Abbildung wird die Abhängigkeit vom Sonnenwindmagnetfeld betrachtet. Die Beziehung (4.112) zeigt dabei einen steileren Anstieg der Dicke der Magnetosheath mit der Magnetfeldstärke. Allerdings stimmen für typische Magnetfeldstärken im Sonnenwind bei der Erde beide Relationen mit den Beobachtungen überein. Somit stellt Gleichung (4.112) eine gültige, analytisch hergeleitete Beziehung für die Dicke der Magnetosheath als Funktion der Sonnenwindbedingungen dar.

### 4.3 Berechnungsalgorithmus für ein Reihenentwicklungsmodell<sup>4</sup>

Im Folgenden wird das Vorgehen zur Berechnung einer Lösung des Reihenentwicklungsmodells für die Ordnung  $N_S = 0$  erläutert. Das System nullter Ordnung besteht aus den Differenzialgleichungen (4.25)–(4.28). Abbildung 4.6 stellt das Modell nullter Ordnung in einem Flussdiagramm überblickend dar. Die Ableitungen der tangentialen Geschwindigkeiten sind durch  $v_{y10} = 0.8 \Delta v / \Delta x_{BS}$  nach Gleichung (4.106) und  $v_{z01} = \Delta v / \Delta x_{BS}$  nach Gleichung (4.110) bestimmt. Der Entwicklungskoeffizient für das Magnetfeld  $B_{x01}$  ist über Gleichung (4.68) und Gleichung (4.109) durch

$$B_{x01} = \frac{\Delta B}{\Delta x_{BS}} \quad (4.115)$$

bestimmt.

Die Sonnenwindbedingungen werden als Eingangsparameter an das Modell übergeben, um eine Lösung in der Magnetosheath zu berechnen. Sie sind durch die Massendichte  $\rho_{SW}$  beziehungsweise die Teilchendichte  $N_{SW}$ , die  $x$ -Komponente der Geschwindigkeit  $v_{SW}$ , die  $z$ -Komponente des Magnetfeldes  $B_{z,SW}$  und die Temperatur  $T_{SW}$  im Sonnenwind bestimmt. Eine  $x$ -Komponente des Magnetfeldes beeinflusst die Lösung des Systems nullter Ordnung nicht wesentlich. Eine  $y$ -Komponente des Sonnenwindmagnetfeldes kann durch das Modell berücksichtigt werden, indem die  $z$ -Komponente  $B_{z0}$  ersetzt wird durch die Amplitude des tangentialen Magnetfeldes, also  $B_{z0} \leftarrow \text{sgn}(B_{z0}) (B_{y0}^2 + B_{z0}^2)^{0.5}$ . Hierbei bezeichnet  $\text{sgn}()$  die Vorzeichenfunktion, auch Signumfunktion genannt. Dann wird das Sonnenwindmagnetfeld  $B_{SW}$  ersetzt mit  $B_{SW} \leftarrow \text{sgn}(B_{z,SW}) (B_{y,SW}^2 + B_{z,SW}^2)^{0.5}$ .

Die Werte der physikalischen Größen direkt hinter der Bugstoßwelle lassen sich durch die Rankine-Hugoniot-Bedingungen bestimmen (siehe z. B. Petrinec und Russell 1997). Diese Werte sind die Randbedingungen der Differenzialgleichungen (4.25)–(4.28). Um  $v_{y10}$ ,  $v_{z01}$  und  $B_{x01}$  zu berechnen, wird der Bugstoßwellenabstand  $\Delta x_{BS}$  benötigt. Dieser ist die Summe aus dem Magnetopausenabstand zum Erdmittelpunkt und der Dicke der Magnetosheath  $x_{MS}$ . Ein anfänglicher Schätzer des Magnetopausenabstandes wird mit  $\Delta x_{MP}^0$  bezeichnet und kann über Gleichung (4.103) durch  $\Delta x_{MP}^0 \leftarrow \Delta x_{MP}$  berechnet werden. Die initiale Schätzung der Dicke der Magnetosheath  $x_{MS}^0$  ist über Gleichung (4.112) mit  $x_{MS}^0 \leftarrow x_{MS}$  gegeben. Dann kann ein Anfangswert für den Bugstoßwellenabstand wie folgt abgeschätzt werden:

$$\Delta x_{BS}^0 = \Delta x_{MP}^0 + x_{MS}^0. \quad (4.116)$$

Damit lassen sich die initialen Schätzer für  $v_{y10}$  über Gleichung (4.106) durch  $v_{y10}^0 \leftarrow v_{y10}$ , für  $v_{z01}$  über Gleichung (4.110) mit  $v_{z01}^0 \leftarrow v_{z01}$  und für  $B_{x01}$  über Gleichung (4.115) mit  $B_{x01}^0 \leftarrow B_{x01}$  berechnen. Damit kann das Differenzialgleichungssystem (4.25)–(4.28) numerisch gelöst werden. Dafür werden die Differenzialgleichungen in Form einer Matrix-

<sup>4</sup>Dieser Abschnitt ist bei Nabert et al. (2015) entnommen und an die Darstellung bei Nabert et al. (2013) angepasst.

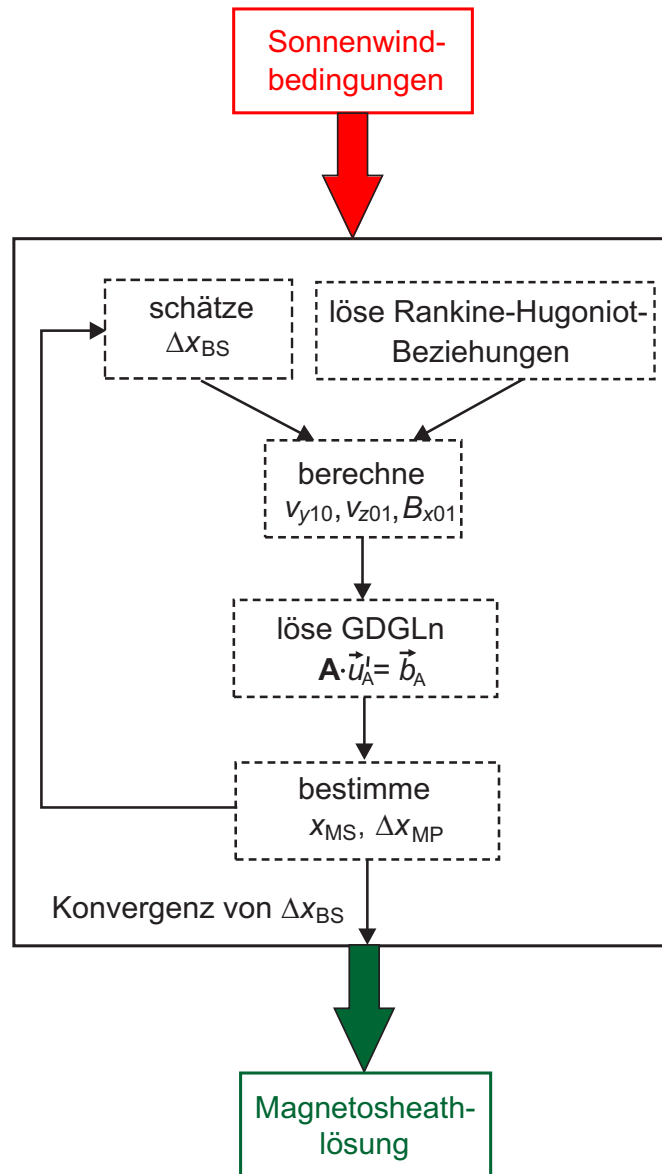


Abbildung 4.6: Flussdiagramm für die Berechnung des Reihenentwicklungsmodells nullter Ordnung (nach Nabert et al. 2015). Die Sonnenwindbedingungen werden vorgegeben. Zunächst wird der Abstand der Bugstoßwelle zum Mittelpunkt der Erde initial geschätzt. Anschließend sind die Rankine-Hugoniot-Bedingungen für die gegebenen Sonnenwindbedingungen zu lösen. Daraus ergeben sich die Randbedingungen für das System von gewöhnlichen Differenzialgleichungen (GDGLn) nullter Ordnung. Die Lösung führt auf einen neuen Schätzer des Bugstoßwellenabstandes. Nach einigen Iterationen konvergiert der Wert des Bugstoßwellenabstandes und die korrekte Lösung für die Magnetosheath ist bestimmt.



Vektor-Gleichung geschrieben:

$$\begin{pmatrix} v_{x0} & \rho_0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{z0} & 0 & v_{x0} \\ 0 & \rho_0 v_{x0} & 1 & \frac{B_{z0}}{\mu_0} \\ -\gamma p_0 \rho^{-\gamma-1} & 0 & \rho^{-\gamma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho'_0 \\ v'_{x0} \\ p'_0 \\ B'_{z0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho_0 (v_{y10} + v_{z01}) \\ -B_{z0} v_{y10} \\ \frac{B_{x01} B_{z01}}{\mu_0} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.117)$$

Diese Gleichung lässt sich ausdrücken durch

$$\mathbf{A}(\vec{u}_A) \cdot \vec{u}'_A = \vec{b}(\vec{u}_A), \quad (4.118)$$

mit dem Lösungsvektor  $\vec{u}_A := (\rho_0, v_{x0}, p_0, B_{z0})^T$ , der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$  und der Inhomogenität  $\vec{b}_A$ . Dabei hängt  $\vec{b}_A$  nicht nur von  $\vec{u}_A$ , sondern auch von den zuvor geschätzten Werten für  $v_{y10}$ ,  $v_{z01}$  und  $B_{x01}$  ab. Für die numerische Berechnung wird die Magnetosheathlösung  $\vec{u}_A$  entlang der  $x$ -Richtung diskretisiert:

$$\vec{u}_A(x) \rightarrow \vec{u}_A(x_i) = \vec{u}_{A,i}, \quad (4.119)$$

mit dem Index  $i$  für die Diskretisierung des Raumes. Die Diskretisierung führt für das Gleichungssystem (4.118) auf

$$\mathbf{A}(\vec{u}_{A,i}) \frac{(\vec{u}_{A,i+1} - \vec{u}_{A,i})}{\Delta x} = \vec{b}_A(\vec{u}_{A,i}), \quad (4.120)$$

wobei  $\Delta x$  die Schrittweite in  $x$ -Richtung ist. Gleichung (4.120) kann bezüglich  $\vec{u}_{A,i+1}$  durch ein Gauss-Verfahren gelöst werden. Dabei wird die Lösung in der Magnetosheath von der Bugstoßwelle bis zur Magnetopause hin berechnet. Die Magnetopause ist erreicht, wenn die Strömungsgeschwindigkeit  $v_{x0} = 0$  wird. Der sich dabei ergebende Abstand zwischen Bugstoßwelle und Magnetopause ergibt einen neuen Schätzer für die Dicke der Magnetosheath  $x_{MS}^1$ .

Die innere Randbedingung durch das planetare Magnetfeld am Stagnationspunkt nach Gleichung (4.80) führt auf

$$p_{\text{tot,MP}} = \frac{(f M)^2}{2 \mu_0 (\Delta x_{\text{MP}})^6}. \quad (4.121)$$

Der gesamte Druck an der Magnetopause  $p_{\text{tot,MP}}$  auf der Seite der Magnetosheath ist durch  $p_{\text{tot,MP}} = B_{z0}^2(x_{MS})/(2 \mu_0)$  gegeben. Nun kann Gleichung (4.121) bezüglich  $\Delta x_{\text{MP}}$  gelöst werden:

$$\Delta x_{\text{MP}} = \left( \frac{f^2 M^2}{B_{z0}^2(x_{MS})} \right)^{\frac{1}{6}}. \quad (4.122)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich mit  $\Delta x_{\text{MP}}^1 \leftarrow \Delta x_{\text{MP}}$  ein neuen Schätzer  $\Delta x_{\text{MP}}^1$  für den Magnetopausenabstand bestimmen. Zusammen mit der neu berechneten Dicke der Magnetosheath  $x_{MS}^1$  ergibt sich ein neuer Schätzer für den Bugstoßwellenabstand:  $\Delta x_{\text{BS}}^1 = \Delta x_{\text{MP}}^1 + x_{MS}^1$ .

Damit kann im Modell nullter Ordnung mit den Gleichungen (4.97) und (4.98) eine Bestimmung der Divergenzparameter durchgeführt werden. Wie in Abbildung 4.6 skizziert, wird mit dem neu geschätzten Bugstoßwellenabstand eine neue Iteration in der Berechnung der Magnetosheathlösung durchgeführt. Konvergiert der Bugstoßwellenabstand in diesem iterativen Prozess, ist die endgültige Lösung der Magnetosheath  $\vec{u}_{A,i}$  bestimmt.

Modelle höherer Ordnung mit  $N_S > 0$  lassen sich analog lösen. Dazu wird das System von Differenzialgleichungen nullter Ordnung durch ein System von Differenzialgleichungen der gewünschten Ordnung  $N_S$  ersetzt. Die Koeffizienten der Ordnung  $N_S + 1$  werden auf die Werte hinter der Bugstoßwelle gesetzt. Die Bugstoßwellengeometrie ist parametrisiert durch den Bugstoßwellenabstand am subsolaren Punkt zur Erde und die Krümmungsparameter wie in Gleichung (4.17) zu erkennen. Die Geometrieparameter der Bugstoßwelle werden so lange variiert, bis die Randbedingung (4.78) hinter der Magnetopause erfüllt ist. Dabei muss einerseits die Randbedingung am Stagnationspunkt erfüllt sein, was über den Abstand der Magnetopause den Bugstoßwellenabstand festlegt. Außerdem ist Bedingung (4.78) neben der Stagnationslinie gültig, sodass sich ausreichend viele weitere Bedingungen ergeben, um die Krümmungsparameter der Bugstoßwelle eindeutig zu bestimmen.

## 4.4 Untersuchungen der Reihenenwicklungsmodelle<sup>5</sup>

### 4.4.1 Beziehungen zu anderen Modellen

Die Reihenenwicklungsmodelle erlauben eine systematische Untersuchung der Wechselwirkung des Sonnenwinds mit dem Erdmagnetfeld. Dabei lassen sich die Entwicklungsordnungen nutzen, um andere Modelle nach ihrer Approximationsordnung zu charakterisieren.

Ein erstes Modell, welches die Auswirkungen eines Sonnenwindmagnetfeldes auf die Magnetosheath betrachtete, wurde von Lees (1964) vorgestellt. In dem Modell war ein ansteigendes Magnetfeld in der Magnetosheath unter nordwärtigem Sonnenwindmagnetfeld zu beobachten. Dabei staut sich das Magnetfeld vor der Magnetopause an, was auch als magnetischer Pile-up bezeichnet wird. Das Modell ist beschränkt auf die Staupunktstromlinie und nutzt dieselben Approximationen der Sonnenwindbedingungen wie die Reihenenwicklungsmodelle der Erde. Lees leitete Gleichungen aus den stationären idealen MHD-Gleichungen ab, die dem hier vorgestellten System nullter Ordnung (4.25)–(4.28) ähneln. Vernachlässigt man die magnetische Scherung ( $\rightarrow B_{x01} B_{z0} = 0$ ) und nimmt eine achsensymmetrische Strömung in dem System nullter Ordnung an ( $v_{y10} = v_{z01}$ ), erhält man die Differenzialgleichungen von Lees. Das Modell von Lees stellt somit eine Näherung nullter Ordnung für die Lösung der Magnetosheath dar. Um dieses System zu schließen, schlägt er vor, die Divergenzfunktion  $v_{y10}$  als Teil der Lösung entlang der Magnetopause, weg von der Stagnationslinie, zu berechnen, ohne dies jedoch weiter auszuführen. Die zuvor vorgestellte analytische Lösung in Abschnitt 4.2 ist eine Erweiterung des Modells von Lees, bei der die Geometrieparameter aus der Lösung durch Randbedingungen selbstkonsistent bestimmt werden.

Ein detaillierteres Modell, das Vorgänge in der Magnetosheath untersucht, wurde von Zwan und Wolf (1976) vorgestellt. Dieses sogenannte Depletion-Modell betrachtet dabei die Dichte- und Magnetfeldvariationen entlang der Staupunktstromlinie und in einer Umgebung darum. Dabei werden die zeitabhängigen idealen MHD-Gleichungen genutzt, um ein System zweidimensionaler partieller Differenzialgleichungen herzuleiten. Dieses System von Differenzialgleichungen beschreibt die Eigenschaften einer magnetischen Fluss-

---

<sup>5</sup>Dieser Abschnitt ist bei Nabert et al. (2013) entnommen und an die Darstellung dieser Arbeit angepasst.

röhre, welche sich durch die Magnetosheath bewegt. In dem Depletion-Modell werden einige Approximationen, wie die WKB-Näherung (benannt nach Gregor Wentzel, Hendrik Anthony Kramers und Léon Brillouin) und Taylorentwicklungen genutzt, welche die Berechnungen auf die Umgebung der Stagnationslinie beschränken. Obwohl das Modell von Zwan und Wolf (1976) viele einschränkende Annahmen macht, konnte es das Bild von einem anstauenden Magnetfeld in der Magnetosheath vertiefen. Für nordwärtiges Magnetfeld wird das Plasma aus der Flussröhre heraus gedrückt, während sich diese der Magnetopause annähert. Um die Druckbilanz zu erfüllen, geht das Entweichen des Plasmas mit einem Anstieg der Magnetfeldstärke einher. Die Region abfallender Dichte wird als Entleerungsschicht (englisch: plasma depletion layer) bezeichnet und ist kleiner als in dem Modell von Lees. In dem Modell von Zwan und Wolf (1976) sind, ähnlich wie bei den Reihenentwicklungsmodellen, Randwerte für die Divergenzparameter zu bestimmen. Dafür nutzen sie Werte aus hydrodynamischen Simulationen von Spreiter et al. (1966). Als Schließungsbedingung für ihr System von Differenzialgleichungen wird der funktionale Zusammenhang des Drucks vorgegeben. Dieser wird ebenfalls aus dem Vergleich zu hydrodynamischen Simulationen gewonnen. Unter Annahme desselben Zusammenhangs für den Druck im Reihenentwicklungsmodell ließe sich das System erster Ordnung (4.25)–(4.33) lösen. Das legt nahe, dass das Modell von Zwan und Wolf (1976) einer Näherung erster Ordnung entspricht, auch wenn das Vorgehen von Zwan und Wolf grundlegend anders ist und auf dem Lösen partieller Differenzialgleichungen beruht. Bemerkt sei, dass die Koeffizientenfunktionen der Geschwindigkeit in zweiter Ordnung im Reihenentwicklungsmodell der Erde nicht zum System erster Ordnung beitragen und daher auch nicht über Schließungsbedingungen zu bestimmen sind.

Erkaev (1988) nutzt sogenannte Materialkoordinaten (siehe auch Erkaev et al. 2003), welche es ermöglichen, die idealen MHD-Gleichungen in ein neues System von partiellen Differenzialgleichungen zu transferieren. Dabei haben diese Koordinaten Achsen entlang der Strömungsrichtung, des Magnetfeldes sowie des elektrischen Feldes (Pudovkin und Semenov 1977). Nimmt man eine Relation für den gesamten Druck in der Magnetosheath an, lassen sich die MHD-Gleichungen vereinfachen. Dies führt dann auf ein System von zweidimensionalen partiellen Differenzialgleichungen, das dünne Flussröhren beschreibt. Ähnlich zur Reihenentwicklungsmethode der Erde wird auch hier eine parametrisierte Bugstoßwelle verwendet. Die Krümmungen von Bugstoßwelle und Magnetopause werden selbstkonsistent über Randbedingungen an der Magnetopause berechnet. Diese Bedingungen sind eine verschwindende Normalkomponente der Geschwindigkeit und des Magnetfeldes sowie die Annahme, dass der Druck eine newtonsche Approximation erfüllt (Petrinec und Russell 1997). Das Vorgehen von Erkaev (1988) wurde genutzt, um eine als magnetische Barriere bezeichnete Region zu untersuchen. Diese Region ist nichts anderes als die Entleerungsschicht. Mit dem Modell wurden numerische Lösungen der Magnetosheath von der Erde (Farrugia et al. 1997), von der Venus (Biernat et al. 1999) und von Jupiter (Erkaev et al. 1996) berechnet. Weiterhin untersuchte Erkaev et al. (2000) die Auswirkungen eines anisotropen Drucks.

#### 4.4.2 Vergleich mit THEMIS-Daten

In diesem Abschnitt werden die Reihenentwicklungsmodelle der Erde für verschiedene Ordnungen auf zwei unterschiedlichen Situationen angewandt. Es wird eine hydrodyna-

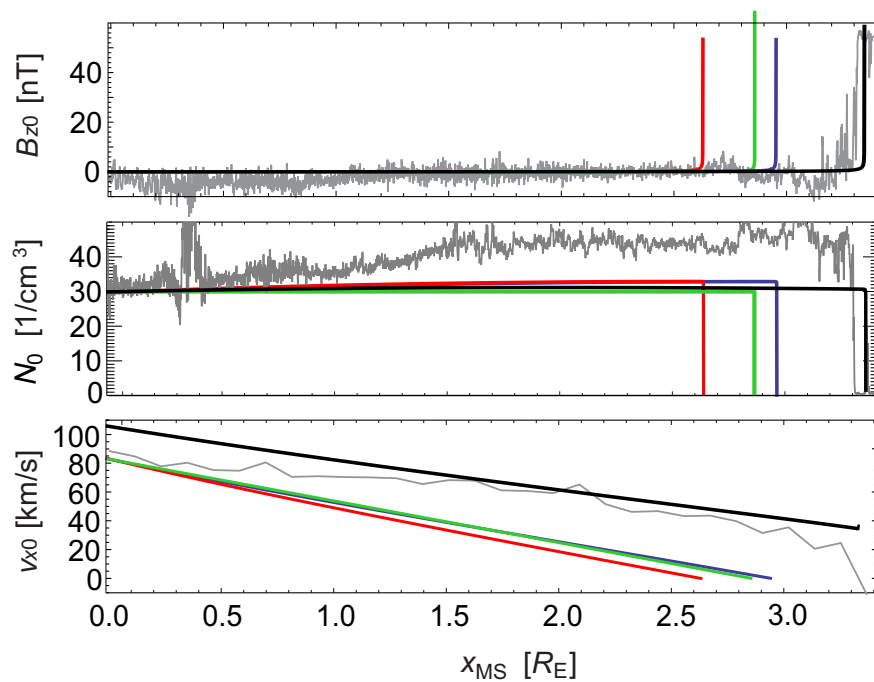


Abbildung 4.7: Lösungen auf der Stagnationslinie in der Magnetosheath mit einem magnetfeldfreien Sonnenwind für die analytische Näherung (grün), das Modell nullter Ordnung (rot) und das Modell zweiter Ordnung (blau). Weiterhin sind die Lösung des Modells zweiter Ordnung entlang der Trajektorie des Raumfahrzeugs (schwarz) und die zugehörigen THEMIS-Daten vom 24. August 2008 (grau) dargestellt (nach Nabert et al. 2013).

mische Situation betrachtet, bei der das Sonnenwindmagnetfeld ungefähr Null ist. Weiterhin wird ein Szenario mit signifikantem Sonnenwindmagnetfeld untersucht, welches zu einem starken Anstauen von Magnetfeld vor der Magnetopause führt. In Übereinstimmung mit den Ergebnissen der ersten Schätzung für das Erdmagnetfeld aus Kapitel 3.4 wird das Dipolmoment mit  $M \approx -8 \cdot 10^{15} \text{ T m}^3$  angenähert.

Zunächst wird eine Situation ohne Sonnenwindmagnetfeld betrachtet. Dann erwartet man eine magnetfeldfreie Magnetosheath und Ergebnisse, die mit den hydrodynamischen Simulationen von zum Beispiel Spreiter et al. (1966) übereinstimmen. Für eine Beispielrechnung wird eine Sonnenwindgeschwindigkeit  $v_{\text{SW}} = 310 \text{ km/s}$ , eine Sonnenwinddichte  $N_{\text{SW}} = 8/\text{cm}^3$ , ein Sonnenwindmagnetfeld  $B_{\text{SW}} = 0.02 \text{ nT}$  und eine Temperatur des Sonnenwinds  $T_{\text{SW}} = 1.75 \cdot 10^5 \text{ K}$  gewählt. Diese Bedingungen stimmen mit den gemittelten Sonnenwindbedingungen während des Durchgangs von THC durch die Magnetosheath am 24. August 2008 gut überein. Das Raumfahrzeug durchquerte die Magnetosheath in etwa  $5.5 R_E$  Abstand in  $y$ -Richtung und in etwa  $2 R_E$  Abstand in  $z$ -Richtung zur Stagnationslinie. Der Sonnenwind lässt sich in diesem Zeitraum über die Beobachtungen von THB abschätzen.

Die Reihenentwicklungsmethode wird für diese Bedingungen in der analytischen Näherung, in der nullten Ordnung und der zweiten Ordnung betrachtet. Die Ergebnisse sind zusammen mit den THC-Daten vom 24. August 2008 in Abbildung 4.7 dargestellt. Die Lösung des Modells nullter Ordnung führt auf eine kleinere Dicke der Magnetosheath,

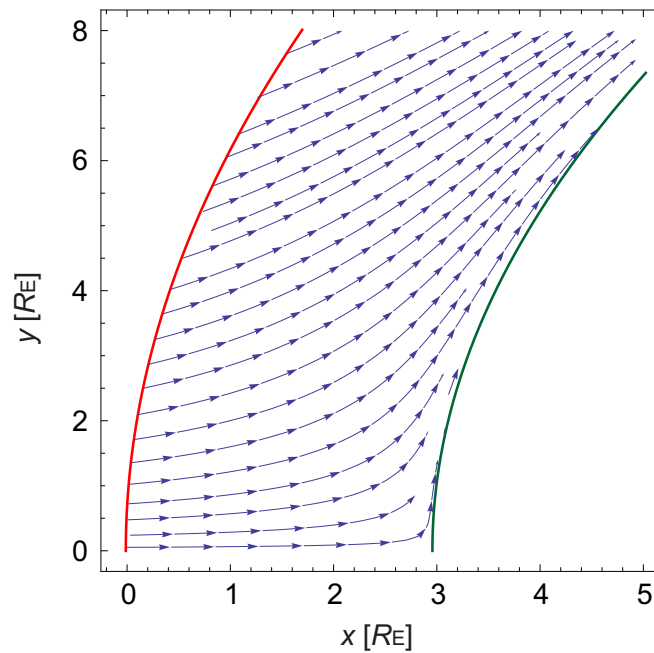


Abbildung 4.8: Stromlinien der Geschwindigkeit in der Magnetosheath für den Fall eines magnetfeldfreien Sonnenwinds, die über das System zweiter Ordnung berechnet wurden (nach Nabert et al. 2013). Weiterhin sind die parabolische Bugstoßwelle (rot) und die Magnetopause (grün) skizziert.

wohingegen die analytische Näherung und die Lösung zweiter Ordnung eine ähnliche Dicke ergeben. Die beobachtete Dicke der Magnetosheath ist jedoch um etwa  $0.4 R_E$  größer. Dieser Unterschied lässt sich durch den Abstand des Raumfahrzeugs zur Stagnationslinie erklären. Wird dieser Abstand in der Lösung des Modells zweiter Ordnung berücksichtigt, stimmen Modell und Beobachtungen besser überein.

Die analytische Lösung nutzt eine lineare Näherung für die  $x$ -Komponente der Geschwindigkeit, welche dazu führt, dass die Lösung des Magnetfeldes an der Magnetopause singularär wird. In allen Lösungen, außer bei der analytischen, ist ein leichter Anstieg der Dichte zu beobachten. Dieser rührt von der Umwandlung des dynamischen Drucks in Gasdruck her. Aufgrund des vernachlässigten dynamischen Drucks kann dieser Anstieg in der analytischen Näherung nicht beobachtet werden. In den Daten steigt die Dichte stärker an als in den Modellen, was auf eine Erhöhung der Sonnenwinddicke von etwa 15% während des Magnetosheathdurchgangs zurückzuführen ist.

Die Geschwindigkeiten fallen in allen Modellen etwa linear ab. Allerdings haben nur die Berechnungen auf der Stagnationslinie eine verschwindende Geschwindigkeitskomponente  $v_x$  an Magnetopause. Neben der Stagnationslinie verbleibt ein endlicher Wert vor der Magnetopause, der erst beim Durchgang durch die Magnetopause auf Null zurückgeht. Dieses Verhalten stimmt mit den Beobachtungen überein.

Mit der Lösung des Systems zweiter Ordnung lässt sich die Geschwindigkeitsverteilung in der dreidimensionalen Magnetosheath betrachten. Die zugehörigen Stromlinien in der  $xy$ -Ebene sind in Abbildung 4.8 dargestellt. Die Strömung wird durch die Bugstoßwelle abgelenkt und ist an der Magnetopause tangential zu dieser Grenzschicht. Weiterhin

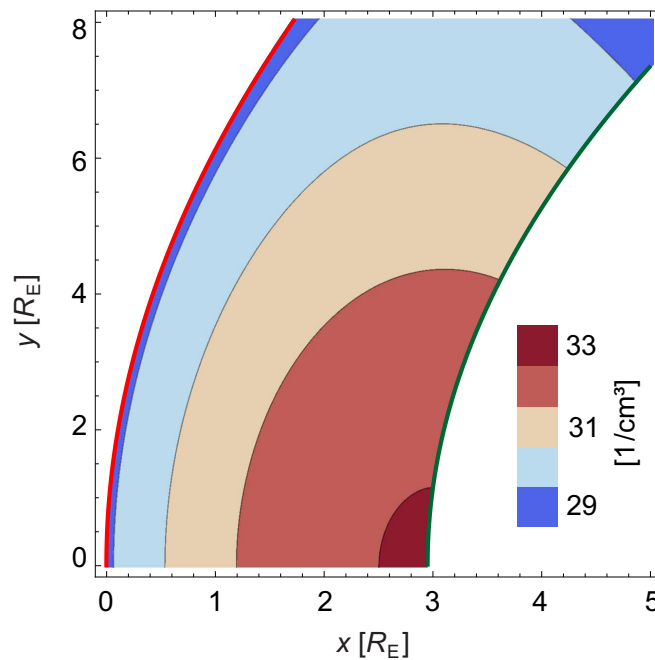


Abbildung 4.9: Dichteverteilung der Lösung des Systems zweiter Ordnung in der Magnetosheath für den Fall eines magnetfeldfreien Sonnenwinds (nach Nabert et al. 2013). Die parabolische Bugstoßwelle (rot) und die Magnetopause (grün) sind eingezeichnet.

ist in Abbildung 4.9 die Dichteverteilung in der  $xy$ -Ebene zu sehen. Es lässt sich erkennen, dass die Dichte weiter weg von der Stagnationslinie kleiner wird. Die gezeigten Ergebnisse stimmen insgesamt gut, sowohl mit den THEMIS-Beobachtungen als auch mit den numerischen Rechnungen von Spreiter et al. (1966) für einen großen Bereich der tagseitigen Magnetosheath überein. Dabei liefert die Lösung des Systems zweiter Ordnung, mit seiner selbstkonsistent berechneten Magnetopause und Bugstoßwelle, die beste Übereinstimmung mit den THEMIS-Daten. Es kann auch gezeigt werden, dass die oft verwendeten empirischen Modelle der Magnetopause von Shue et al. (1998) und der Bugstoßwelle von Bennett et al. (1997) ungefähr dieselben Krümmungen vorhersagen wie das hier verwendete Reihenenwicklungsmodell.

Der gezeigte Magnetopausendurchgang besitzt eine lokalisierte Stromschicht, was der von Chapman und Ferraro (1930) beschriebenen Situation der Wechselwirkung entspricht. Dabei ist der gesamte Strom der Wechselwirkung an der Magnetopause lokalisiert und die Magnetosheath bleibt magnetfeldfrei. Die Stromverteilung kann sich deutlich verändern, wenn ein signifikantes Sonnenwindmagnetfeld vorliegt. Ein Beispiel dafür wurde am 29. Oktober 2009 von dem Satelliten THC der THEMIS-Mission beobachtet. Die zugehörigen Daten sind in Abbildung 4.10 dargestellt. Die Magnetfeldstärke an der Bugstoßwelle erhöht sich stark, was einem elektrischen Strom dort entspricht. Hinter der Bugstoßwelle steigt das Magnetfeld weiter an, wobei die zugehörigen elektrischen Ströme über die gesamte Magnetosheath verteilt sind. Die Dichte und die Temperatur verändern sich nahe der Magnetopause stark, verglichen mit dem nahezu kontinuierlichen Magnetfeld. Dieses Verhalten steht im Gegensatz zu dem Fall eines magnetfeldfreien Sonnen-

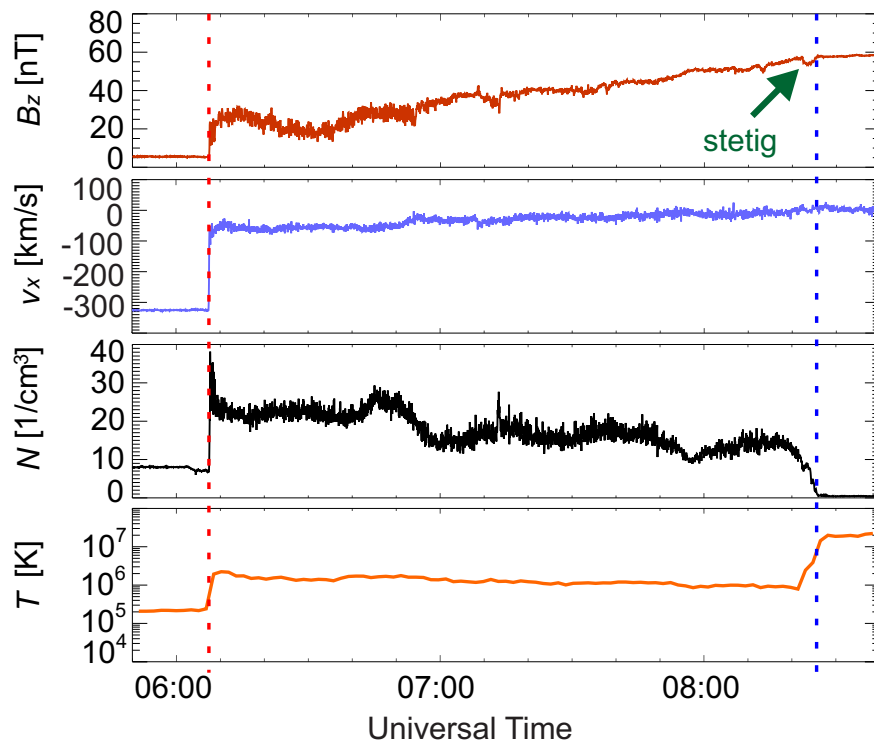


Abbildung 4.10: Daten eines Magnetosheathdurchgangs von THC am 29. Oktober 2009. Dargestellt ist die  $z$ -Komponente des Magnetfeldes, die  $x$ -Komponente der Geschwindigkeit, die Dichte der Ionen und die Temperatur der Ionen (nach Nabert et al. 2013). Während sich die Dichte und die Temperatur nahe der Magnetopause stark verändern, ist die Magnetfeldkomponente stetig.

winds, welcher zuvor betrachtet wurde. Das kontinuierliche Ansteigen des Magnetfeldes ist der magnetische Pile-up, der schon im Modell von Lees (1964) beobachtet wurde.

Die Daten aus Abbildung 4.10 zeigen nur einen Teil der gesamten Beobachtungen in der Magnetosheath. Etwa 1:30 h vor dem gezeigten Bugstoßwellendurchgang gab es zwei weitere Durchgänge durch die Bugstoßwelle, die von THC beobachtet wurden. Während des präsentierten Datenintervalls lag die Sonnenwindgeschwindigkeit bei 325 km/s, die Temperatur bei  $2.1 \cdot 10^5$  K und das Sonnenwindmagnetfeld zwischen 5.0 nT und 5.5 nT. Das von THC beobachtete Magnetfeld ist nordwärtig mit Abweichungen kleiner als  $45^\circ$ , wobei sie im letzten Abschnitt sogar kleiner als  $10^\circ$  sind. Der Orbit des Satelliten ist nahe der Stagnationslinie, mit Abweichungen kleiner als  $2R_E$ . Die Sonnenwinddichte verändert sich jedoch während der Beobachtungen, was die Annahme einer stationären Situation verletzt. Durch THB lassen sich während des Durchgangs von THC durch die Magnetosheath Sonnenwinddaten gewinnen. Die Ionendichte des Sonnenwinds und die in der Magnetosheath werden in Abbildung 4.11 miteinander verglichen. Direkt nach den ersten zwei Durchgängen durch die Bugstoßwelle um 04:30 UT und 04:50 UT, steigt die Sonnenwinddichte an, wodurch sich die Magnetopause und die Bugstoßwelle erdwärts bewegen. Aus diesem Grund tritt das Raumfahrzeug kurze Zeit später, gegen 05:00 UT, wieder in den Sonnenwind ein.

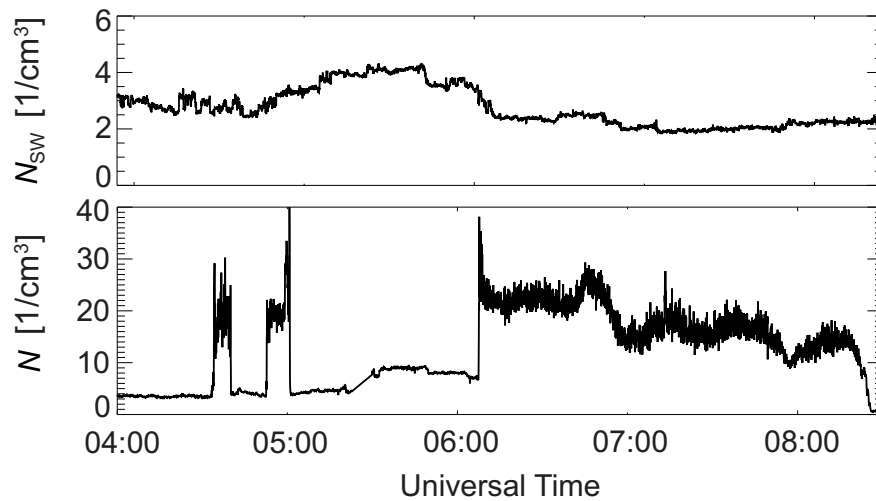


Abbildung 4.11: Die Teilchendichte im Sonnenwind gemessen von THB und von THC während der Durchgänge durch die Bugstoßwelle (nach Nabert et al. 2013). Die Absolutwerte der Dichte stimmen nicht gut überein, was durch ein elektrisches Potenzial am Raumfahrzeug erklärt werden kann. Die Variationen der Dichte lassen sich gut vergleichen. Der Dichtesprung in den THC-Daten bei etwa 05:30 UT ist auf einen Wechsel des Beobachtungsmodus des ESA (Electrostatic Analyzer) Plasma Instruments zurückzuführen (McFadden et al. 2008).

Der Bugstoßwellenabstand zum Mittelpunkt der Erde sowie die Dicke der Magnetosheath, berechnet über das Modell zweiter Ordnung, sind in Abbildung 4.12 zu sehen. Beide Größen werden mit zunehmender Sonnenwinddicke kleiner. Dieses Verhalten stimmt mit den Ergebnissen der analytischen Näherung nach Gleichung (4.103) und Gleichung (4.112) überein. Weiterhin zeigen die Ergebnisse aus Abbildung 4.12, dass die Auswirkungen der Variation des Sonnenwindmagnetfeldes während des Magnetosheathdurchgangs vom 29. Oktober 2009 vernachlässigbar gegenüber den Dichteänderungen sind.

Wie in Abbildung 4.11 zu erkennen ist, geht dem von THC beobachteten Bugstoßwelledurchgang um 06:05 UT ein Abfall der Sonnenwinddicke voraus. Dies geht mit einer sonnenwärtigen Bewegung der Bugstoßwelle einher. Daher ist die Geschwindigkeit hinter der Bugstoßwelle in Abbildung 4.10 etwa 20 km/s kleiner als von den Rankine-Hugoniot-Bedingungen (1.53)–(1.58) für eine stationäre Situation zu erwarten. Als Konsequenz der Dichtevariation verändern sich die Positionen von Bugstoßwelle und Magnetopause im ersten Teil der Beobachtungen. Daher lassen sich die Längenskalen der Beobachtungen nicht mit der stationären Rechnung des Modells vergleichen. Die Ergebnisse der analytischen Näherung, des Modells nullter Ordnung sowie des Modells zweiter Ordnung sind in Abbildung 4.13 dargestellt.

Alle Ordnungen des Reihenentwicklungsmodells, auch die nullte Ordnung, beschreiben das Auftreten eines Staupunktes. Dabei ruft die gekrümmte Bugstoßwelle eine Ablenkung und Abbremsung der Sonnenwindströmung hervor. Das durch die Bugstoßwelle abgebremste Plasma wird aufgrund der Deflexion in der Magnetosheath in Richtung der Staupunktstromlinie weiter abgebremst, was zu der nahezu linearen Abnahme der Ge-



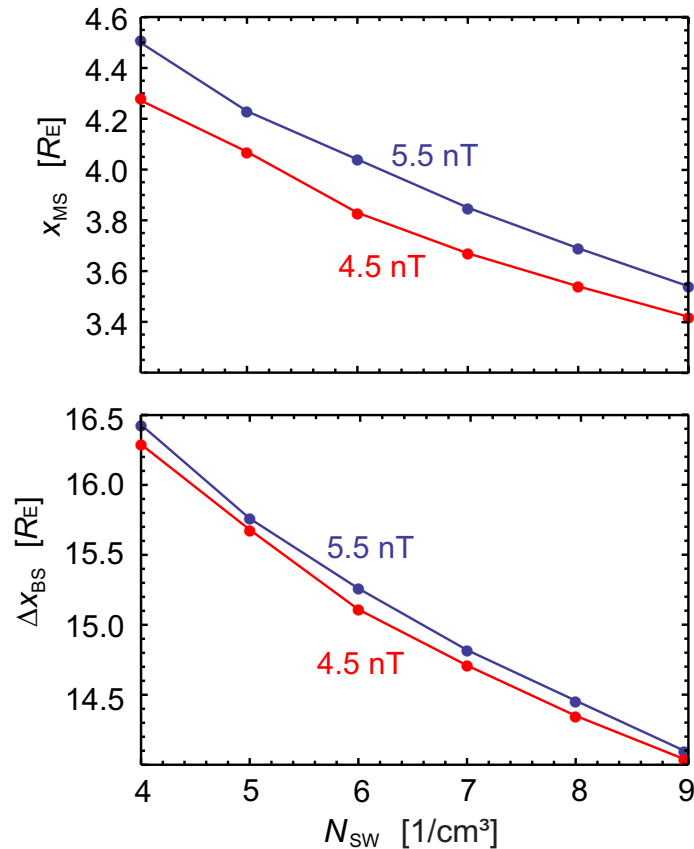


Abbildung 4.12: Die Dicke der Magnetosheath und der Bugstoßwellenabstand vom Erdmittelpunkt als Funktion der Sonnenwinddichte für die Lösung des Modells zweiter Ordnung (nach Nabert et al. 2013). Dabei wurden zwei verschiedene Sonnenwindmagnetfeldstärken, 4.5 nT und 5.5 nT, betrachtet.

schwindigkeit entlang der Staupunktstromlinie führt. Charakteristisch für die Magnetfeldverteilung unter nordwärtigem Sonnenwindmagnetfeld ist ein Anstauen von Magnetfeld in der Magnetosheath. Dieser Effekt wird ebenfalls von allen Ordnungen des Reihenentwicklungsmodells beschreiben. Das Plasma der Magnetosheath kann an der Magnetopause in zwei Dimensionen vom Staupunkt wegströmen, wohingegen das Magnetfeld aufgrund seiner eindimensionalen Gestalt nur in eine Dimension entweichen kann (Siscoe et al. 2002). Daher gibt es mehr Möglichkeiten für das Plasma als für Magnetfeldlinien vor der Magnetopause von der Staupunktstromlinie zu entweichen, was zu einem Anstauen des Magnetfeldes führt. Um die Druckbilanz zu erfüllen, geht der Anstieg des Magnetfeldes mit einem Abfall der Dichte einher. Im Modell erster Ordnung geschieht der Abfall der Dichte langsamer verglichen mit dem Modell zweiter Ordnung. Das Modell nullter Ordnung ist vergleichbar mit dem Modell von Lees (1964), wohingegen das Modell von Zwan und Wolf (1976) einem Modell erster Ordnung entspricht, bei dem ein stärkerer Dichteabfall beobachtet wurde. Die Druckgradienten bezüglich der  $y$ - und  $z$ -Richtungen im Modell zweiter Ordnung verstärken das Wegströmen von Plasma von der Stagnationslinie nahe der Magnetopause. Daher ist die Dicke der Entleerungsschicht

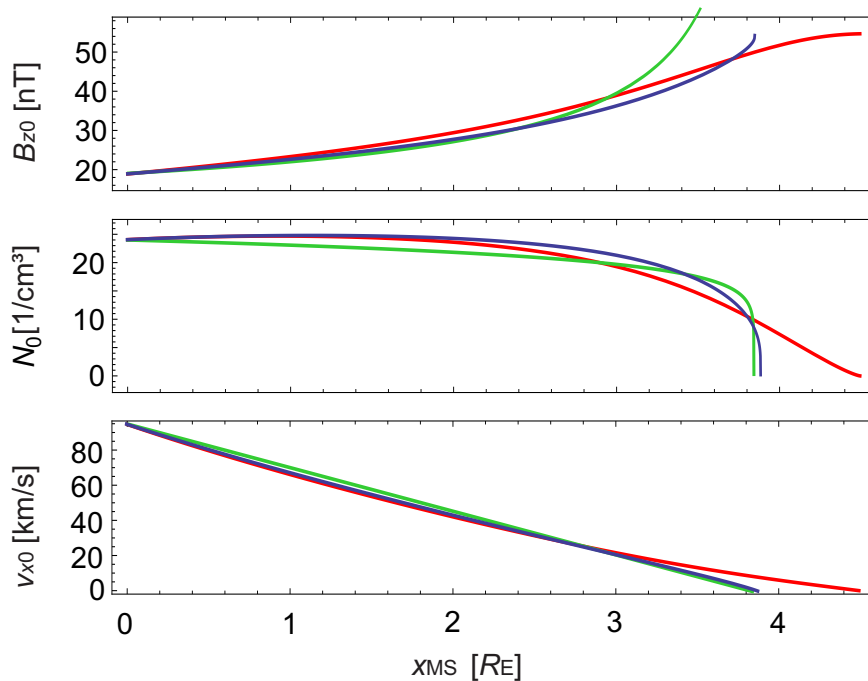


Abbildung 4.13: Lösungen in der Magnetosheath entlang der Staupunktstromlinie für ein signifikantes Sonnenwindmagnetfeld für die analytische Näherung (grün), die numerische Lösung erster Ordnung (rot) und die numerische Lösung zweiter Ordnung (blau) (nach Nabert et al. 2013).

in den Modellen höherer Ordnung kleiner. Beobachtungen der Entleerungsschicht in der Magnetosheath der Erde finden sich beispielsweise auch in Crooker et al. (1979) oder Farrugia et al. (1998). Auch ein sehr kleines Sonnenwindmagnetfeld führt zu einem Anstauen des Magnetfeldes. Dabei beschränkt sich der Prozess jedoch auf die nahe Umgebung der Magnetopause. Erst für stärkere Sonnenwindmagnetfelder ist das Anstauen des Magnetfeldes in der gesamten Magnetosheath zu beobachten.

Es sei bemerkt, dass die Reihenentwicklungsmodelle auch allgemeiner, ohne die Annahmen über die Symmetrien aus Tabelle 4.1, hergeleitet werden können. Die zugehörigen Differenzialgleichungen beinhalten dann auch die Entwicklungskoeffizienten, die zuvor aufgrund der Symmetrien zu vernachlässigen waren. Dann lassen sich auch Situationen mit beliebigem Sonnenwindmagnetfeld oder planetarem Magnetfeld betrachten. Dabei befindet sich die Stagnationslinie nicht notwendigerweise entlang der  $x$ -Achse des Modells.

## 4.5 Quasi-stationäre Zeitskalen

Aus den Ergebnissen des analytischen Modells lässt sich eine typische Zeitskala für eine quasi-stationäre Magnetosheath abschätzen. Für mittlere Sonnenwindbedingungen bei der Erde findet man nach den Ergebnissen in Abbildung 4.5 eine typische Dicke der tagseitigen von Magnetosheath  $\langle x_{MS} \rangle \approx 3 R_E$ . Über die Rankine-Hugoniot-Lösung (4.43)

kann eine Geschwindigkeit direkt hinter der Bugstoßwelle für eine typische Sonnenwindgeschwindigkeit von 400 km/s im Grenzfall hoher Machzahlen zu  $v_{BS} \approx 100$  km/s berechnet werden. Der Geschwindigkeitsabfall in der Magnetosheath ist etwa linear und so lässt sich eine mittlere Strömungsgeschwindigkeit in der Magnetosheath entlang der Staupunktstromlinie angeben durch  $\langle v_{MS} \rangle \approx 50$  km/s. Damit ergibt sich eine Transitzeit von

$$t_{MS} = \frac{\langle x_{MS} \rangle}{\langle v_{MS} \rangle}. \quad (4.123)$$

Für die mittleren Werte bei der Erde ergibt sich  $t_{MS} \approx 6$  min. Nimmt man an, dass einige Transitzeiten nötig sind, um eine stationäre tagseitige Magnetosheath zu erhalten, ergibt sich folglich eine Zeitskala für die stationäre Magnetosheath von etwa 10 – 20 min. Dabei wurden rückwirkende Prozesse von der Nachtseite, wie Rekonnexion im Schweif vernachlässigt.

Analog kann die quasi-stationäre Zeitskala für Merkur bestimmt werden. Eine mittlere Dicke der Magnetosheath lässt sich mit  $\langle x_{MS} \rangle \approx 0.5 R_M$  abschätzen (Winslow et al. 2013). Die mittlere Sonnenwindgeschwindigkeit ist etwa 430 km/s nach Tabelle 1.1. Im Grenzfall großer Machzahlen führt dies auf eine Plasmageschwindigkeit hinter der Bugstoßwelle von 108 km/s. Wird wieder ein linearer Abfall in der Geschwindigkeit betrachtet, lässt sich die Transitzeit abschätzen mit  $t_{MS} \approx 23$  s. Somit ergibt sich für Merkur eine Zeitskala für quasi-stationäre Prozesse von 1 min.

Aufgrund des kleineren planetaren Magnetfeldes sind die Bugstoßwelle und die Magnetopause bei Merkur deutlich dichter am Planeten als bei der Erde. Da die Sonnenwindgeschwindigkeiten vergleichbar sind, ergibt sich eine kleinere Zeitskala für die Approximation quasi-stationärer Prozesse in der Magnetosheath bei Merkur als bei der Erde. Somit sind diese Approximation, falls sie für die Erde anwendbar ist, auch für Merkur gültig. Dabei gilt es allerdings zu beachten, dass sich die quasi-stationäre Approximation auf die Magnetosheath beschränkt und nicht für mögliche Induktionsprozesse im Planeteninnern von Merkur gültig ist.

## 4.6 Vergleich mit dem MHD-Simulationscode

In Kapitel 2.3 wurde der MHD-Simulationscode mit Daten der THEMIS-Mission aus der Magnetosheath verglichen. Dabei war zu beobachten, dass die Geometrie der Magnetosheath, die Magnetosheathdichte und das Magnetfeld hinter der Magnetopause in der Simulation nicht immer mit den Beobachtungen übereinstimmten. Mit dem MHD-Simulationscode wurde in Kapitel 3.4 das planetare Magnetfeld der Erde geschätzt. Dabei traten Fehler in der Magnitude des Magnetfeldes von bis zu 25% und in der  $z$ -Komponente von bis zu 15% auf. Diese Fehler könnten mit den beobachteten Abweichungen zwischen Simulationslösungen und Daten zusammenhängen, wobei deren Ursachen im Folgenden mithilfe der Reihenentwicklungsmodelle untersucht werden.

Zunächst wird das Reihenentwicklungsmodell nullter Ordnung mit dem MHD-Simulationscode für typische Sonnenwindbedingungen bei der Erde nach Tabelle 1.1 verglichen. Für die Diffusionskoeffizienten werden die Werte der MHD-Simulationen aus Kapitel 2.3 verwendet. Die genauen Einstellungen der MHD-Simulation sind im Anhang B.2 in Tabelle B.4 zu finden. Aufgrund der idealen MHD-Betrachtung sind alle Diffusionskoeffizienten in den Reihenentwicklungsmodellen stets Null. Das planetare

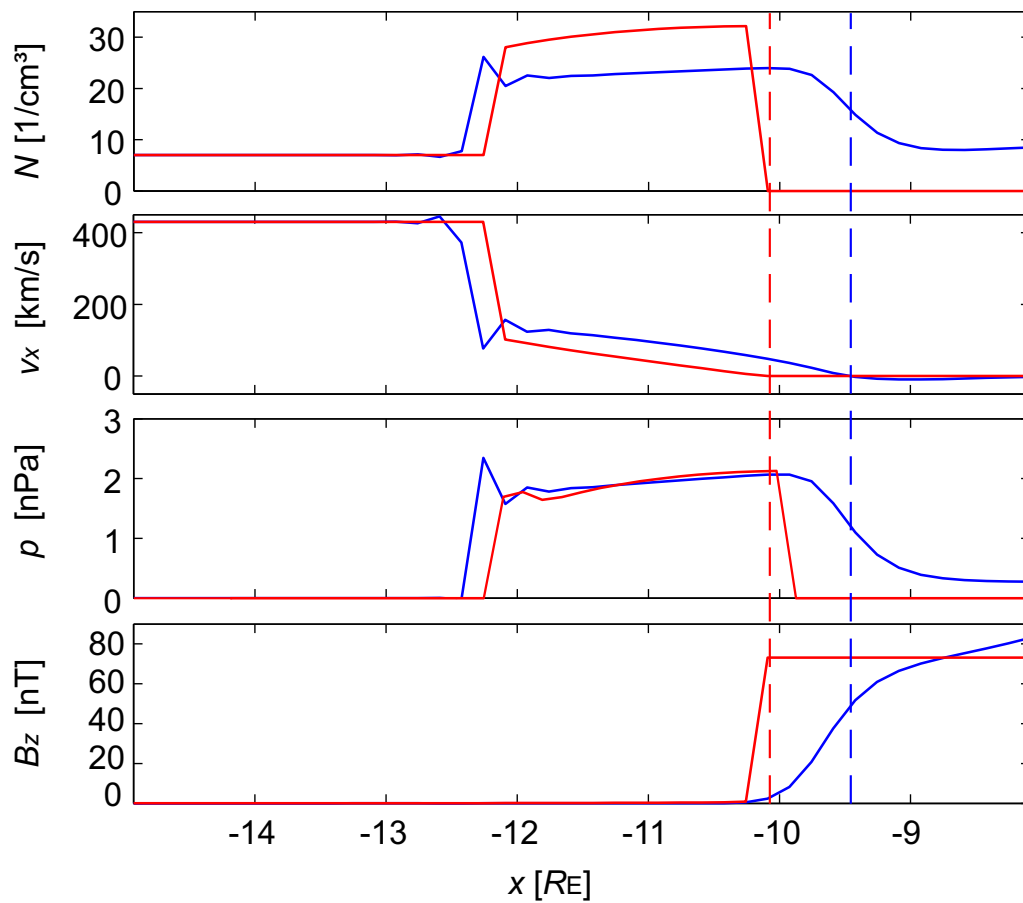


Abbildung 4.14: Die Dichte, die  $x$ -Komponente der Geschwindigkeit, der Gasdruck und die  $z$ -Komponente des Magnetfeldes für typische Sonnenwindbedingungen bei der Erde. Dabei sind Ergebnisse für das Reihenentwicklungsmodell nullter Ordnung (rot) und die MHD-Simulation (blau) entlang der Stagnationslinie dargestellt. Die Lage der Magnetopause in den beiden Modellen ist hervorgehoben (gestrichelte Linien).

Magnetfeld wurde in beiden Modellen durch einen Dipol in  $z$ -Richtung bestimmt. Für eine einheitliche Darstellung der Resultate beider Modelle werden in diesem Kapitel MSP-Koordinaten genutzt. Die Ergebnisse von dem Reihenentwicklungsmodell nullter Ordnung und die von der MHD-Simulation entlang der  $x$ -Achse für typische Sonnenwindbedingungen sind in Abbildung 4.14 zu sehen.

Die Bugstoßwelle befindet sich in der Lösung der MHD-Simulation bei  $12.3 R_E$  und damit etwa  $0.1 R_E$  weiter draußen als bei der Lösung des Reihenentwicklungsmodells. Die subsolare Magnetopause bei der MHD-Simulationslösung liegt um  $0.6 R_E$  näher an der Erde als in der Lösung des Reihenentwicklungsmodells, wo sie bei  $10.1 R_E$  auftritt. Dabei wurde die subsolare Magnetopause anhand einer verschwindenden Normalkomponente in der Geschwindigkeit identifiziert. Folglich ist die subsolare Dicke der Magnetosheath in der Lösung des Reihenentwicklungsmodells  $2.1 R_E$ , wohingegen diese in der Simulationslösung mit  $2.8 R_E$  deutlich größer ist. Die mittlere Dichte in der Magnetosheath beträgt in der Lösung des Reihenentwicklungsmodells  $30.8/\text{cm}^3$  und in der MHD-

Simulationslösung nur  $22.9/\text{cm}^3$ . Somit ist die Dichte in der Lösung Reihenentwicklungsmodell etwa 33% größer.

Daher unterscheiden sich die Lösungen beider Modelle in einigen Eigenschaften deutlich voneinander. Einerseits könnte dies auf die verwendeten Approximationen des Reihenentwicklungsmodells nullter Ordnung zurückgeführt werden. Andererseits können auch die durch das numerische Schema bedingten endlichen Diffusionskoeffizienten im MHD-Simulationscode die Unterschiede hervorrufen. Die Lage der Magnetopause in Raumfahrzeugbeobachtungen bei der Erde lässt sich über das empirische Modell von Shue et al. (1998) angeben, das in Kapitel 2.3 vorgestellt wurde. Für die hier betrachteten Sonnenwindbedingungen ist nach dem Modell eine subsolare Magnetopausenposition von  $10.2 R_E$  zu erwarten. Die Magnetopausenbeobachtungen stimmen folglich wesentlich besser mit den Ergebnissen des Reihenentwicklungsmodells überein.

Um zu überprüfen, ob sich die Unterschiede der Lösungen beider MHD-Modelle über die endlichen Diffusionskoeffizienten im MHD-Simulationscode erklären lassen, werden MHD-Simulationen für unterschiedliche Resistivitäten durchgeführt. Die Ergebnisse für typische Sonnenwindbedingungen sind in Abbildung 4.15 zu sehen. Die detaillierten Einstellungen der MHD-Simulationen sind im Anhang B.2 in Tabelle B.4 zu finden. Es zeigt sich, dass die Positionen von Bugstoßwelle und Magnetopause stark von der Resistivität abhängen. Für die kleinste betrachtete Resistivität betrug der subsolare Magnetopausenabstand  $9.5 R_E$  und für die größte  $9.0 R_E$ . Der Magnetopausenabstand scheint folglich für größere Resistivitäten weiter innen zu liegen. Somit könnte für eine kleinere Resistivität eventuell auch der subsolare Magnetopausenabstand des Modells von Shue et al. (1998) reproduziert werden. Allerdings konnte keine stabile Simulation für kleinere Resistivitäten durchgeführt werden. Außerdem ist zu erkennen, dass sich der Bugstoßwellenabstand bei einer kleinen Resistivität weiter außen befindet. Das führt bei der kleinsten hier betrachteten Resistivität zu einer Dicke der Magnetosheath von  $3.9 R_E$ , was größer als von Beobachtungen her zu erwarten ist. Weiterhin wird auch die Dichte in der Magnetosheath für eine kleinere Resistivität kleiner, was den Beobachtungen aus Kapitel 2.3 ebenfalls widerspricht. Somit ist durch eine kleinere Resistivität zwar den Magnetopausenabstand besser zu bestimmen, allerdings würden sowohl die Dicke der Magnetosheath als auch die Dichte in der Magnetosheath schlechter mit den Beobachtungen übereinstimmen.

Auch die anderen Diffusionskoeffizienten können die Ergebnisse der MHD-Simulation beeinflussen. Daher wurden analog zur Betrachtung der Resistivität MHD-Simulationen für verschiedene dynamische Viskositäten betrachtet. Die Ergebnisse für typische Sonnenwindbedingungen sind in Abbildung 4.16 dargestellt. Der subsolare Magnetopausenabstand hängt nicht wesentlich von der dynamischen Viskosität ab. Der Bugstoßwellenabstand hingegen befindet sich für eine kleinere dynamische Viskosität weiter von der Erde entfernt. Die sich ergebende größere Dicke der Magnetosheath geht mit einer kleineren mittleren Dichte in der Magnetosheath einher, ähnlich wie es auch für unterschiedliche Resistivitäten beobachtet wurde.

Insgesamt lässt sich eine starke Abhängigkeit der Ergebnisse der MHD-Simulationen von den Diffusionskoeffizienten feststellen. Die Diffusionskoeffizienten können die Abweichungen zwischen den Lösungen der MHD-Simulationen und den THEMIS-Daten in Kapitel 2.3 beeinflussen. Es stellt sich die Frage, welche Werte sich für die Diffusionskoeffizienten bei einem Planeten wie der Erde oder dem Merkur aus Raumfahrzeugbeobachtungen ergeben. Da es sich beim Sonnenwindplasma um ein im Wesentlichen stoßfreies

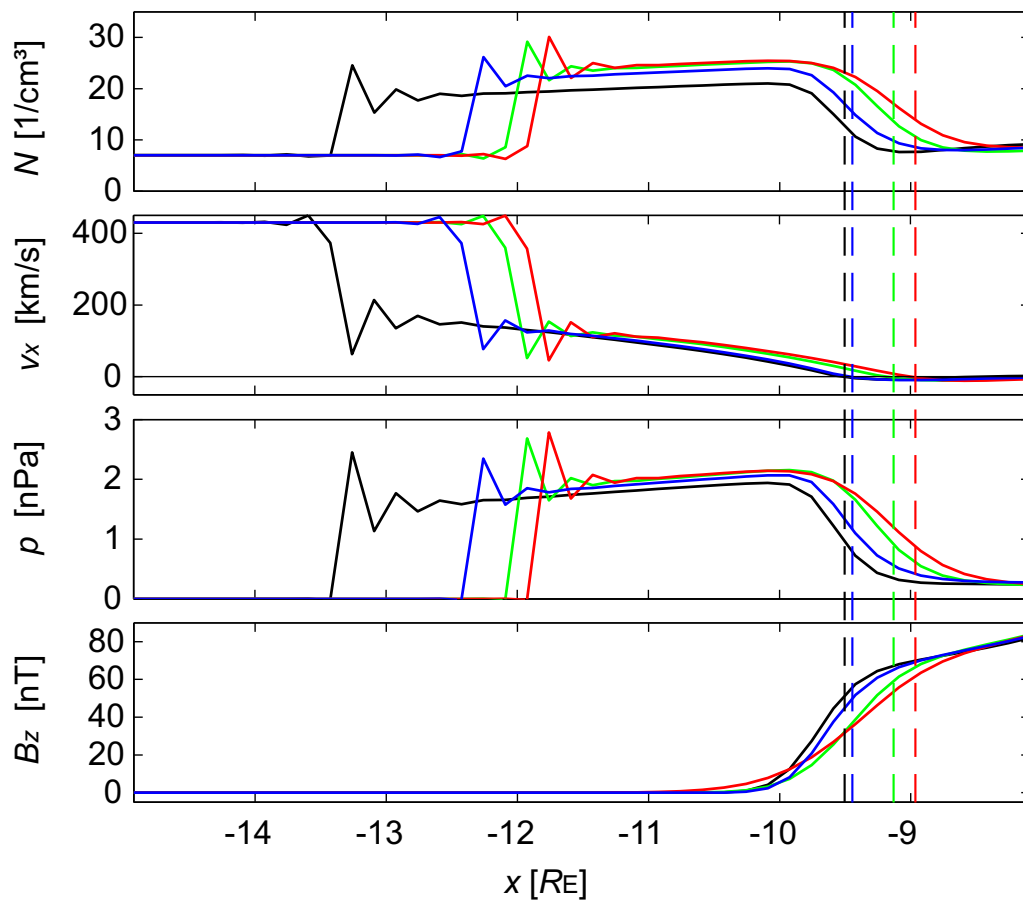


Abbildung 4.15: MHD-Simulationslösungen für unterschiedliche Resistivitäten. Dabei wurde  $\eta = 0.0005 \eta_{\text{norm}}$  (schwarz),  $\eta = 0.001 \eta_{\text{norm}}$  (blau),  $\eta = 0.002 \eta_{\text{norm}}$  (grün),  $\eta = 0.004 \eta_{\text{norm}}$  (rot) betrachtet. Stagnationspunkte sind durch gestrichelte Linien hervorgehoben.

Plasma handelt, kann von einer vernachlässigbaren Viskosität, welche mit Reibung verknüpft ist, ausgegangen werden. Daher wird in den MHD-Gleichungen auch nur aufgrund der numerischen Stabilität ein viskoser Term benötigt. In Abbildung 4.16 ist zu sehen, dass die Bugstoßwelle in diesem Grenzwert weiter nach außen, von der Erde weg, rückt. Gleichzeitig fällt die mittlere Dichte in der Magnetosheath, was gegen die Beobachtungen aus Kapitel 2.3 spricht. Hier ist von einem starken Einfluss von numerischen Effekten auf die Ergebnisse der MHD-Simulation auszugehen. Welche physikalischen Effekte sich aus endlichen Diffusionskoeffizienten ergeben, wird im nächsten Kapitel anhand der Resistivität genauer untersucht.

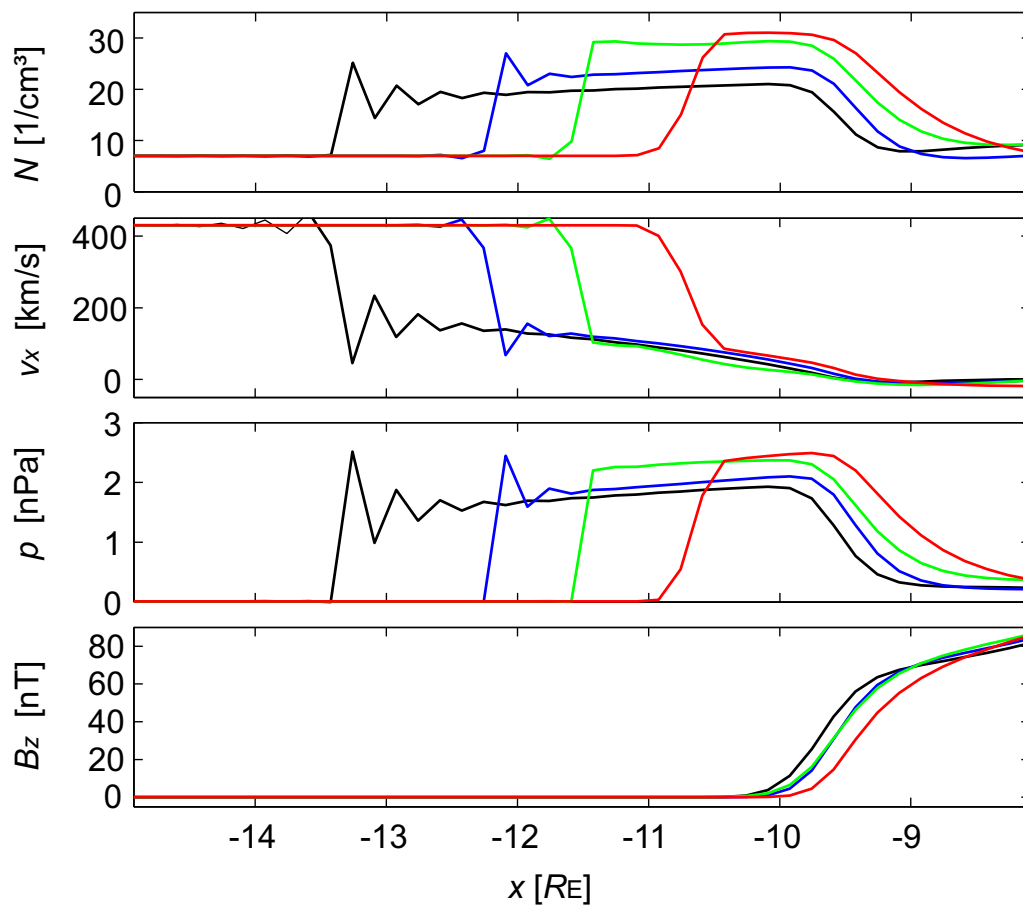


Abbildung 4.16: MHD-Simulationslösungen für unterschiedliche dynamische Viskositäten. Dabei wurden  $D_v = 0.001 \nu_{\text{norm}}$  (schwarz),  $D_v = 0.002 \nu_{\text{norm}}$  (blau) und  $D_v = 0.004 \nu_{\text{norm}}$  (rot) betrachtet.





## 5 Prozesse aufgrund einer endlichen Resistivität

Neben den Parametern des planetaren Magnetfeldes und den Sonnenwindparametern wurden in den MHD-Simulationen auch Parameter für die Resistivität beziehungsweise elektrische Leitfähigkeit verwendet. Die Ergebnisse der MHD-Simulationen zeigten einen starken Einfluss der Resistivität auf die Lösung der Wechselwirkung (vergleiche Kapitel 4.6). Als Nächstes ist zu untersuchen, welche Effekte physikalischen Ursprungs und welche numerische Artefakte des Lösungsalgorithmus sind. Dazu werden die Prozesse in einem Gebiet endlicher elektrischer Leitfähigkeit an der Magnetopause analysiert und der zugehörige Resistivitätsparameter der MHD-Beschreibung aus Raumfahrzeugbeobachtungen geschätzt.

In diesem Kapitel wird die Reihenentwicklungsmethode um eine endliche Resistivität ergänzt. Die zugehörigen erweiterten Reihenentwicklungsmodelle ermöglichen die Prozesse der magnetischen Rekonnexion und Diffusion detailliert zu untersuchen. Damit lassen sich die partiellen Differenzialgleichungen der MHD auf gewöhnliche Differenzialgleichungen reduzieren, was den Einfluss eines numerischen Fehlers verkleinert. Dies ist für die hier betrachteten Prozesse nahe der Magnetopause besonders wichtig, weil sich dort die physikalischen Größen stark ändern können.

Beispielsweise tritt unter südwärtigem Sonnenwindmagnetfeld an der Magnetopause eine antiparallele Feldkonfiguration zwischen dem Sonnenwindmagnetfeld und dem planetaren Magnetfeld auf. Nach dem in Kapitel 1.5 vorgestellten Sweet-Parker-Modell führt diese Konfiguration in einem Gebiet endlicher elektrischer Leitfähigkeit, dem Diffusionsgebiet, zu magnetischer Rekonnexion. Allerdings ist das Sweet-Parker-Modell wegen der verwendeten Symmetrien nicht geeignet, die Situation an der Magnetopause zu beschreiben. Der Rekonnexionsprozess verbindet die südwärtigen Sonnenwindmagnetfeldlinien mit den nordwärtigen planetaren Magnetfeldlinien innerhalb der Sonnenwindströmung in der Magnetosheath. In das Diffusionsgebiet kann das planetare Magnetfeld unabhängig vom Sonnenwindmagnetfeld in die Strömung in der Magnetosheath eindringen. Dieser Diffusionsprozess wird genutzt, um den Resistivitätsparameter mit Raumfahrzeugdaten abzuschätzen.

### 5.1 Anstauen und Rekonnexion in der Magnetosheath

Unter nordwärtigem Sonnenwindmagnetfeld staut sich das Magnetfeld vor der Magnetopause nahe des Stagnationspunktes an. Dieses Anstauen bedeutet einen Anstieg der Magnetfeldamplitude, wie in Kapitel 4 diskutiert wurde. Für ein südwärtiges Sonnenwind-

magnetfeld könnte sich, im Rahmen der idealen MHD, das negative Magnetfeld ebenfalls vor der Magnetopause anstauen. Dann wäre jedoch das angestaute Magnetfeld antiparallel zum Erdmagnetfeld. Aufgrund der endlichen elektrischen Leitfähigkeit an der Magnetopause kommt es in diesem Fall zu magnetischer Rekonnexion, weshalb eine Beschreibung der Situation im Rahmen der nicht-idealen MHD stattfinden muss.

Betrachtet man ein Druckgleichgewicht des Gasdrucks und des magnetischen Drucks nahe der subsolaren Magnetopause, gilt

$$p + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} = \text{konst.} \quad (5.1)$$

Wie zuvor schon diskutiert, ist dieses Druckgleichgewicht eine gute Näherung in der Magnetosheath und umso besser, je näher man dem subsolaren Punkt der Magnetopause kommt, weil dort der dynamische Druck bereits vollständig abgebaut wurde. Das Druckgleichgewicht (5.1) besagt, dass bei Annäherung an die Magnetopause ein ansteigendes Magnetfeld mit einem Abfallen des Gasdrucks einhergeht und umgekehrt. Wird wie zuvor ein adiabatisches Gesetz für den Gasdruck angenommen ( $p \propto \rho^\gamma$ ), gehen Änderungen des Gasdrucks einher mit Variationen der Massendichte. Daher wird von der Strömung nahe der Magnetopause stets eines der beiden folgenden Szenarien realisiert:

(a)  $|\vec{B}|$  steigt und  $\rho$  fällt

(b)  $|\vec{B}|$  fällt und  $\rho$  steigt

Um die Frage, welche der beiden Optionen durch die Strömung realisiert wird, zu beantworten, werden die Kontinuitätsgleichung (1.23) und die nicht-ideale Erweiterung des Theorems des eingefrorenen Flusses nach Gleichung (1.40) betrachtet. Nimmt man einen stationären Zustand an ( $\partial_t \rightarrow 0$ ) und beschränkt das Magnetfeld auf die  $z$ -Richtung, vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung und die dritte Komponente von Gleichung (1.40) zu

$$\partial_x \rho v_x + \partial_y \rho v_y + \partial_z \rho v_z = 0, \quad (5.2)$$

$$\partial_x B_z v_x + \partial_y B_z v_y + N_z = 0. \quad (5.3)$$

Die Struktur dieser partiellen Differenzialgleichungen ist ähnlich. Nähert sich eine Strömung in  $x$ -Richtung einer Magnetopause in der  $yz$ -Ebene an, dann kann die Massendichte in alle Richtungen parallel zur Magnetopause abgelenkt werden (siehe linken Hälfte von Abbildung 5.1). Dies lässt sich auch an der Kontinuitätsgleichung (5.2) erkennen, da diese Terme für die Ablenkung der Massenströmung sowohl in  $y$ -Richtung ( $\partial_y \rho v_y$ ) als auch in  $z$ -Richtung ( $\partial_z \rho v_z$ ) besitzt. Für die ideale MHD-Näherung verschwindet der Quellterm in Gleichung (5.3), also ist  $N_z = 0$ . Das Magnetfeld  $B_z$  erfüllt dann eine Kontinuitätsgleichung in der  $xy$ -Ebene. Eine Magnetfeldlinie als eine eindimensionale Linie entlang der  $z$ -Richtung kann sich an der Magnetopause nur entlang der  $y$ -Richtung von der Stagnationslinie weg bewegen. Dieses Verhalten ist mit dem Term  $\partial_y B_z v_y$  in Gleichung (5.3) verknüpft.

Daher kann in der idealen MHD die Massendichte in mehr Richtungen als das Magnetfeld von der Stagnationslinie weg transportiert werden. Dann steigt die Magnetfeldamplitude während die Massendichte sinkt, was Lösung (a) entspricht. Es staut sich

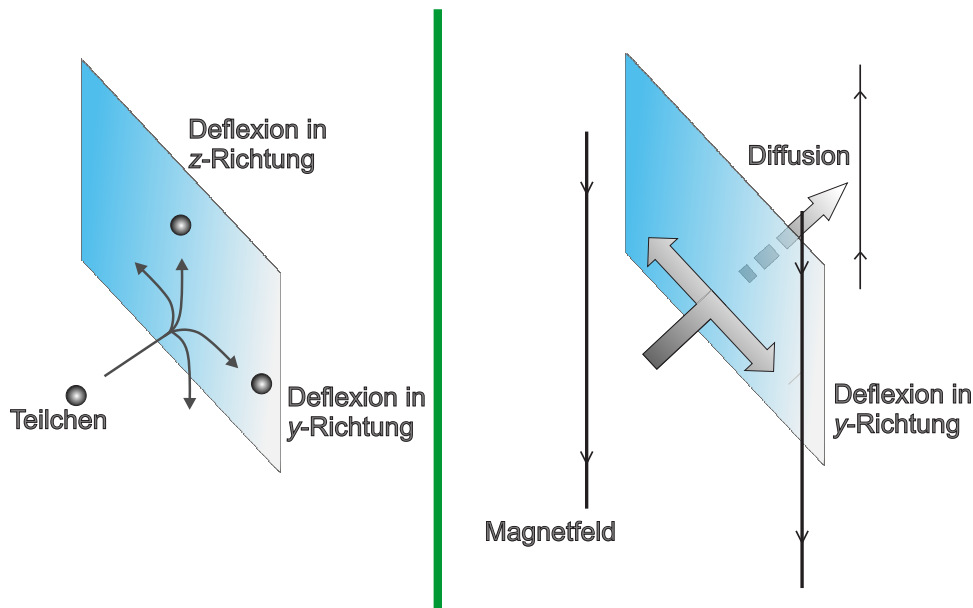


Abbildung 5.1: Der Sonnenwind mit seinem Magnetfeld nähert sich entlang der  $x$ -Richtung der Magnetopause an. Die Teilchen repräsentieren die Massendichte und können in die durch die  $y$ - und  $z$ -Richtung aufgespannte Ebene von der Stagnationslinie entweichen (linke Skizze). Im Gegensatz dazu können Magnetfeldlinien im Rahmen der idealen MHD nur entlang der  $y$ -Richtung entkommen. Erst zusätzliche Prozesse, wie magnetische Diffusion, geben dem Magnetfeld zusätzliche Möglichkeiten von der Stagnationslinie vor der Magnetopause zu entweichen (rechte Skizze).

das Magnetfeld vor der Magnetopause an, während die Dichte abfällt und sich die Entleerungsschicht bildet. Wie zuvor in Kapitel 4.4 diskutiert, kann dieses Verhalten für ein nordwärtiges Sonnenwindmagnetfeld beobachtet werden. Wird ein Quellterm  $N_z$ , wie beispielsweise ein Diffusionsterm  $N_z = -\eta/\mu_0 \partial_x^2 B_z$ , in die Betrachtung von Gleichung (5.3) einbezogen, gibt es weitere Möglichkeiten, wie magnetischer Fluss verteilt werden kann (siehe rechte Skizze in Abb. 5.1). Dadurch ist es möglich, dass Lösung (b) von der Strömung realisiert wird und die Magnetfeldamplitude abfällt während gleichzeitig die Massendichte ansteigt. Für ein sich anstauendes südwardiges Sonnenwindmagnetfeld kann dadurch das Magnetfeld einen Nullpunkt erreichen und Rekonnexion stattfinden. Es verbinden sich Magnetfeldlinien verschiedener Orientierung miteinander.

## 5.2 Erweiterung der Reihenentwicklungsmodelle<sup>1</sup>

In diesem Abschnitt werden die reduzierten Modelle aus dem Kapitel 4 um Terme der nicht-idealen MHD erweitert. Dadurch lassen sich Rekonnexions- und Diffusionsprozesse betrachten. Die Erweiterung spielt bei der tagseitigen Umströmung der Erde nahe der Magnetopause eine besondere Rolle, da dort die elektrische Stromdichte sehr groß wer-

<sup>1</sup>Eine verkürzte Darstellung der Inhalte dieses Kapitels mit der Beschränkung auf die Erweiterung des Reihenentwicklungsmodells um einen resistiven Term findet sich bei Nabert und Glassmeier (2016b).

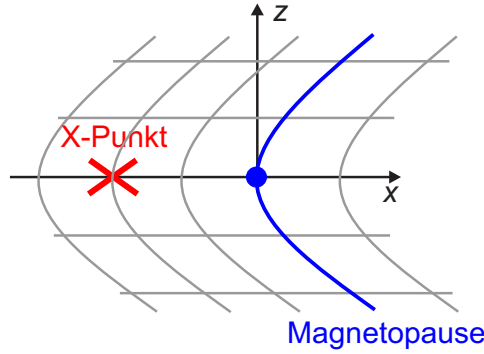


Abbildung 5.2: Ein an die Magnetopause angepasstes Koordinatensystem mit der  $x$ -Achse entlang der Stagnationslinie. Der Ursprung des Koordinatensystems ist der Stagnationspunkt. Ein möglicher X-Punkt der Rekonnexion ist auf der sonnenwärtigen Seite der Magnetopause eingezeichnet.

den kann. Daher wird das erweiterte reduzierte Modell hier auf die Magnetopausenregion beschränkt. Grundsätzlich lässt sich das zuvor eingeführte Koordinatensystem des Reihenentwicklungsmodells mit der Anpassung an die Bugstoßwelle und die Magnetopause weiter nutzen. Für eine übersichtlichere Darstellung wird auf die Anpassung an die Bugstoßwellengeometrie jedoch verzichtet, sodass  $c_{MP,y} \rightarrow c_{BS,y}$  und  $c_{MP,z} \rightarrow c_{BS,z}$  verwendet werden. Weiterhin wird der Ursprung des kartesischen Koordinatensystems mit den Koordinaten  $x, y, z$  vom subsolaren Punkt der Bugstoßwelle zum Stagnationspunkt hin verschoben, also die Verschiebung  $x \rightarrow x - x_{MS}$  durchgeführt. Dann ergibt sich die parametrisierte Magnetopause anstatt über Relation (4.18) durch

$$x = \sum_{j=0}^{N_S+1} \sum_{k=0}^{N_S+1} c_{MP,jk} y^j z^k. \quad (5.4)$$

Die Koordinate  $\tilde{x}$ , die die Magnetopausengeometrie berücksichtigt, ist dann definiert über

$$x = \tilde{x} + \sum_{j=0}^{N_S+1} \sum_{k=0}^{N_S+1} c_{MP,jk} y^j z^k. \quad (5.5)$$

Eine Darstellung des veränderten Koordinatensystems findet sich in Abbildung 5.2. Die Sonnenwindbedingungen werden wieder derart eingeschränkt, dass der ungestörte Sonnenwind entlang der  $x$ -Richtung strömt und das Sonnenwindmagnetfeld in  $z$ -Richtung zeigt. Weiterhin findet auch hier die quasi-stationäre Approximation der MHD-Gleichungen Anwendung.

Zunächst wird die Erweiterung des Reihenentwicklungsmodells der Erde um eine endliche elektrische Leitfähigkeit betrachtet. Dabei nutzt man für den Vektor  $\vec{N}$  aus Gleichung (1.40) den resistiven Term (1.36). Die Resistivität lässt sich, wie auch die anderen physikalischen Größen, in eine Taylorreihe bezüglich  $y$  und  $z$  entwickeln:

$$\eta(x, y, z) = \sum_{j=0}^{N_S+1} \sum_{k=0}^{N_S+1} \eta_{jk}^n(\tilde{x}) y^j z^k. \quad (5.6)$$

Hierbei wurde eine stationäre Resistivitätsverteilung angenommen. Es wird sich auf Resistivitätsverteilungen beschränkt, bei denen nur Koeffizientenfunktionen gerader Ordnung einen Beitrag ungleich Null liefern. Mit dieser Einschränkung bleiben die Symmetrieequationen aus Tabelle 4.1 auch im Rahmen der resistiven MHD erhalten. Dann lässt sich der Ansatz (4.9)–(4.12) für das Reihenentwicklungsmodell der Erde unverändert verwenden. Die hergeleiteten Differenzialgleichungen (4.25)–(4.41) ändern sich nur gemäß des neuen Koordinatensystems und des zusätzlichen Terms  $\vec{N}$ . Dabei bewirkt das veränderte Koordinatensystem die Ersetzungen  $\tilde{c}_y \rightarrow c_{MP,y}$ ,  $\tilde{c}_z \rightarrow c_{MP,z}$ ,  $\Delta c_y = 0$  und  $\Delta c_z = 0$ . Für Gleichung (1.40) ist die nullte Ordnung

$$(B_{z0} v_{x0})' + B_{z0} v_{y10} + N_{z0} = 0, \quad (5.7)$$

mit dem Quellterm nullter Ordnung  $N_{z0}$ . Für die Verwendung des resistiven Beitrags nullter Ordnung  $N_{R,z0}$  für  $N_{z0}$  muss dieser aus Gleichung (1.36) mit den Reihenentwicklungsansätzen bestimmt werden:

$$N_{R,z0} = \left( \frac{\eta_0}{\mu_0} B_{x01} \right)' - \left( \frac{\eta_0}{\mu_0} B'_{z0} \right)' + \frac{\eta_0}{\mu_0} B_{y11} - \frac{2\eta_0}{\mu_0} B_{z20}. \quad (5.8)$$

Hierbei wurde die Abkürzung  $\eta_0 := \eta_{00}$  verwendet. Wird die Krümmung des Magnetfeldes vernachlässigt, vereinfacht sich Ausdruck (5.8) zu

$$N_{R,z0} = -\frac{\eta_0}{\mu_0} B''_{z0} - \frac{\eta'_0}{\mu_0} B'_{z0}. \quad (5.9)$$

Dabei stellt der erste Term auf der rechten Seite einen klassischen Diffusionsterm, wie er im Sweet-Parker-Modell betrachtet wird, dar. Der zweite Term hängt vom Gradienten der Resistivität ab und kann ebenfalls die Bedingung eines ins Plasma eingefrorenen Magnetfeldes verletzen und somit die Rekonnexion beeinflussen. Mit dem resistiven Term nullter Ordnung für  $N_{z0}$  aus Gleichung (5.9) lässt sich Gleichung (5.7) schreiben als

$$(B_{z0} v_{x0})' + B_{z0} v_{y10} = \frac{\eta_0}{\mu_0} B''_{z0} + \frac{\eta'_0}{\mu_0} B'_{z0}. \quad (5.10)$$

In der resistiven MHD ersetzt diese Gleichung dann Gleichung (4.26) in den reduzierten Modellen.

Wird nur die Region nahe der Magnetopause betrachtet, lassen sich weiterhin die Terme, die zum dynamischen Druck gehören, in der Impulsbilanz der nullten Ordnung (4.27) vernachlässigen. Wird die magnetische Scherung ebenfalls vernachlässigt, vereinfacht sich die Impulsbilanz (4.27) zu einer Druckbilanz:

$$p_0 + B_{z0}^2 = \text{konst.} \quad (5.11)$$

Diese Druckbilanz ist die nullte Ordnung von Gleichung (5.1) aus dem vorherigen Abschnitt. Sie beschreibt die Umwandlung des magnetischen Drucks in Gasdruck. Dabei ist am X-Punkt der Rekonnexion der magnetische Druck vollständig in Gasdruck umgewandelt. Anschließend wird der Gasdruck wieder in magnetischen Druck umgewandelt.

Neben einer Erweiterung um einen resistiven Term kann die Reihenentwicklungsmethode aus Kapitel 4 auch um einen Hall-Term erweitert werden. Anders als bei der

Erweiterung um den resistiven Term, verletzt ein Hall-Term (1.38) die Symmetrierelationen aus Tabelle 4.1. Daher muss anstatt der Reihenentwicklung der physikalischen Größen (4.9)–(4.12) der allgemeine Ansatz (4.8) verwendet werden, um die gewöhnlichen Differenzialgleichungen aus den stationären MHD-Gleichungen zu gewinnen. Den Hall-Term kann man als Störung der Symmetrie betrachtet und es werden lediglich Terme, bei denen nur ein Faktor die Symmetrie bricht, in den Differenzialgleichungen berücksichtigt. Beispielsweise würde die Kontinuitätsgleichung (4.1) mit der allgemeinen Reihenentwicklung ohne Symmetrierelationen Terme wie  $\rho_{10} v_{y00}$  beinhalten. Jedoch verletzen beide Faktoren,  $\rho_{10}$  sowie  $v_{y00}$ , die Symmetrierelationen aus Tabelle 4.1. Daher wird dieser Term in den Differenzialgleichungen vernachlässigt. Mit dieser Approximation bleiben alle Differenzialgleichungen (4.25)–(4.41) erhalten, wobei die Beiträge des Hall-Terms noch zu ergänzen sind. Der Beitrag nullter Ordnung des Hall-Terms (1.38) ist gegeben durch

$$N_{H,z0} = -\frac{m_i}{e} \left( \left( \frac{B_{z0} B_{z10}}{\rho_0} \right)' - \left( \frac{B_{z0} B_{y01}}{\rho_0} \right)' \right) - \frac{m_i}{e} \left( \frac{B_{z0} B_{x11}}{\rho_0} - \frac{B_{z0} B'_{z10}}{\rho_0} \right) - \frac{m_i}{e} \left( \frac{B_{x01} B_{z10}}{\rho_0} - \frac{B_{z10} B'_{z0}}{\rho_0} \right). \quad (5.12)$$

Wird angenommen, dass Variationen von  $B_{z0}$  in  $\tilde{x}$ -Richtung dominieren, vereinfacht sich die nullte Ordnung des Hall-Terms zu

$$N_{H,z0} = \frac{m_i}{e} \frac{B_{y01} - B_{z10}}{\rho_0} B'_{z0}. \quad (5.13)$$

Die Terme des Hall-Magnetfeldes  $B_{y01}$  und  $B_{z10}$  führen zu einer Verletzung des Theorems des eingefrorenen Flusses. Gleichung (5.7) mit dem resistiven Beitrag (5.9) und der Hall-Beitrag (5.13) ergibt

$$(B_{z0} v_{x0})' + B_{z0} v_{y10} = \frac{\eta_0}{\mu_0} B''_{z0} + \frac{\eta'_0}{\mu_0} B'_{z0} - \frac{m_i}{e} \frac{B_{y01} - B_{z10}}{\rho_0} B'_{z0}. \quad (5.14)$$

In der resistiven Hall MHD ersetzt diese Gleichung dann Gleichung (4.26) in den reduzierten Modellen.

## 5.3 Analytische Näherung für magnetische Rekonnexion und Diffusion<sup>2</sup>

### 5.3.1 Allgemeine Lösung des Systems nullter Ordnung

Das System nullter Ordnung der nicht-idealen MHD ist durch die Gleichungen (4.25), (4.27), (4.28) und (5.7) gegeben. Dabei lassen sich für  $N_{z0}$  verschiedene Terme wie beispielsweise der resistive Beitrag nullter Ordnung (5.9) oder der Hall-Term nullter Ordnung (5.13) verwenden. Als Schließungsbedingung für dieses System werden die Koeffizientenfunktionen der ersten Ordnung als konstant angenommen. Zusätzlich wird die magnetische Scherung vernachlässigt, sodass  $v_{y10} = \text{konst}$ ,  $v_{z01} = \text{konst}$  und  $B_{x01} = 0$  ist.

---

<sup>2</sup>Eine verkürzte Darstellung der Inhalte dieses Kapitel mit der Beschränkung auf magnetische Diffusion findet sich bei Nabert und Glassmeier (2016b).

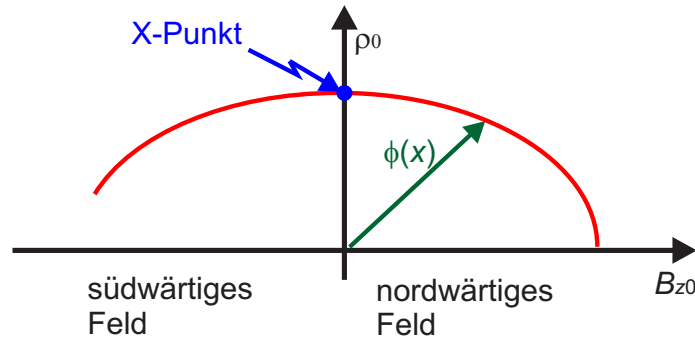


Abbildung 5.3: Die Lösungen von Gleichung (5.15) sind Ellipsen, parametrisiert durch den Winkel  $\phi$ , welcher die Dichte  $\rho_0$  und das Magnetfeld  $B_{z0}$  in Beziehung zueinander setzt.

Der adiabatische Index wird, anders als zuvor, in diesem Abschnitt als  $\gamma = 2$  gewählt, was einem Plasma mit zwei Freiheitsgraden entspricht. Dies ist eine Approximation der echten dreidimensionalen Situation. Damit wird Gleichung (5.11) zu

$$k_P \rho_0^2 + \frac{1}{2\mu_0} B_{z0}^2 = p_{\text{tot}}, \quad (5.15)$$

wobei  $p_{\text{tot}}$ , die Summe aus Gasdruck und magnetischen Druck, eine Konstante entlang der  $\tilde{x}$ -Richtung ist. Die Lösungen von Gleichung (5.15) sind Ellipsen von  $\rho_0$  und  $B_{z0}$ , die sich durch

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{p_{\text{tot}}}{k_P}} \cos(\phi), \quad (5.16)$$

$$B_{z0} = \sqrt{2\mu_0 p_{\text{tot}}} \sin(\phi), \quad (5.17)$$

beschreiben lassen. Hierbei ist der Dichte-Magnetfeld-Winkel  $\phi$  eine Funktion von  $\tilde{x}$  und beschränkt durch  $\phi \in [-\pi/2, +\pi/2]$ , weil die Massendichte nicht negativ sein darf. Wie in Abbildung 5.3 gezeigt, ist die Lösung der Dichte  $\rho_0$  und des Magnetfeldes  $B_{z0}$  durch  $\phi$  festgelegt. Die  $\phi$  bestimmende Differenzialgleichung wird im Folgenden hergeleitet.

In Gleichung (4.25) und (5.7) wird die Dichte  $\rho_0$  und das Magnetfeld  $B_{z0}$  durch die Ausdrücke (5.16) beziehungsweise (5.17) substituiert. Es folgt

$$-\sin(\phi) v_{x0} \phi' + \cos(\phi) (v'_{x0} + v_{y10} + v_{z01}) = 0, \quad (5.18)$$

$$\sin(\phi) (v'_{x0} + v_{y10}) + \cos(\phi) \phi' v_{x0} = -\frac{1}{\sqrt{2\mu_0 p_{\text{tot}}}} N_{z0}. \quad (5.19)$$

Durch die Substitution  $\hat{N}_{z0} := N_{z0}/(2\mu_0 p_{\text{tot}})^{0.5}$  lässt sich die Notation abkürzen. Wird Gleichung (5.19)  $\cdot \cos(\phi)$  von Gleichung (5.18)  $\cdot \sin(\phi)$  subtrahiert, ergibt sich

$$-v_{x0} \phi' + \cos(\phi) (v_{z01} \sin(\phi) - \hat{N}_{z0}) = 0. \quad (5.20)$$

Addiert man Gleichung (5.18)  $\cdot \cos(\phi)$  zu Gleichung (5.19)  $\cdot \sin(\phi)$ , führt dies auf

$$v'_{x0} + v_{y10} + v_{z01} \cos^2(\phi) = -\hat{N}_{z0} \sin(\phi). \quad (5.21)$$

Lösen von Gleichung (5.20) bezüglich der Geschwindigkeit  $v_{x0}$  ergibt

$$v_{x0} = \frac{1}{\phi'} \cos(\phi) (v_{z01} \sin(\phi) - \hat{N}_{z0}). \quad (5.22)$$

Dieser Ausdruck für die Geschwindigkeit wird nach  $\tilde{x}$  differenziert und für  $v'_{x0}$  in Gleichung (5.21) eingesetzt:

$$\begin{aligned} & -2 \cos(\phi) \phi' \hat{N}'_{z0} + 2 \cos(\phi) \phi'' (-v_{z01} \sin(\phi) + \hat{N}_{z0}) \\ & + \phi'^2 (2 v_{y10} + v_{z01} + 3 v_{z01} \cos(2\phi) + 4 \hat{N}_{z0} \sin(\phi)) = 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Dies ist eine gewöhnliche Differenzialgleichung für den Dichte-Magnetfeld-Winkel  $\phi$ . Die Lösung dieser Differenzialgleichung kann in Gleichung (5.16), (5.17) und (5.22) eingesetzt werden, um die Dichte, das Magnetfeld beziehungsweise die Geschwindigkeit zu berechnen. Die Ordnung der Differenzialgleichung hängt von den Differenzialen des Quellterms  $\hat{N}_{z0}$  ab. Ohne einen Quellterm ist die Differenzialgleichung von zweiter Ordnung und es müssen zwei Randbedingungen  $\phi(\tilde{x}_0)$  und  $\phi'(\tilde{x}_0)$  festgelegt werden. Diese können am X-Punkt der Rekonnexionsregion ( $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_{\text{rec}}$ ), an dem die Magnetfeldamplitude  $B_{z0}$  verschwindet, bestimmt werden. Nach Gleichung (5.17) führt dies auf die erste Randbedingung:

$$\phi(\tilde{x}_{\text{rec}}) = 0. \quad (5.24)$$

Die Geschwindigkeit am X-Punkt kann durch die asymmetrische Situation der Rekonnexion an der Magnetopause einen endlichen Wert annehmen, welcher mit  $v_{\text{rec}}$  bezeichnet wird. Damit lässt sich Gleichung (5.22) umschreiben zu

$$\phi'(\tilde{x}_{\text{rec}}) = -\frac{\hat{N}_z(\tilde{x}_{\text{rec}})}{v_{\text{rec}}}. \quad (5.25)$$

Zunächst wird der Quellterm einer endlichen Leitfähigkeit des Plasmas betrachtet. Dieser ist in der Näherung nullter Ordnung durch Gleichung (5.9) beschrieben. Dabei wird sich in diesem Kapitel auf eine homogene Leitfähigkeit beschränkt, wodurch sich Gleichung (5.9) vereinfacht zu

$$N_{R,z0} = -D_{B,0} \partial_x^2 B_{z0}, \quad (5.26)$$

wobei  $D_{B,0} := \eta_0/\mu_0$  die Diffusivität nullter Ordnung ist. Wird der Ausdruck für das Magnetfeld aus Gleichung (5.17) substituiert, erhält man

$$N_{R,z0} = -D_{B,0} \sqrt{2\mu_0 p_{\text{tot}}} (\cos(\phi) \phi'' - \sin(\phi) \phi'^2), \quad (5.27)$$

beziehungsweise für die normierte Darstellung  $\hat{N}_{R,z0}$  folgt

$$\hat{N}_{R,z0} = -D_{B,0} (\cos(\phi) \phi'' - \sin(\phi) \phi'^2). \quad (5.28)$$

Substituiert man den Ausdruck am X-Punkt der Rekonnexion in Gleichung (5.25), ergibt sich

$$\phi''(\tilde{x}_{\text{rec}}) = \frac{v_{\text{rec}}}{D_{B,0}} \phi'(\tilde{x}_{\text{rec}}). \quad (5.29)$$



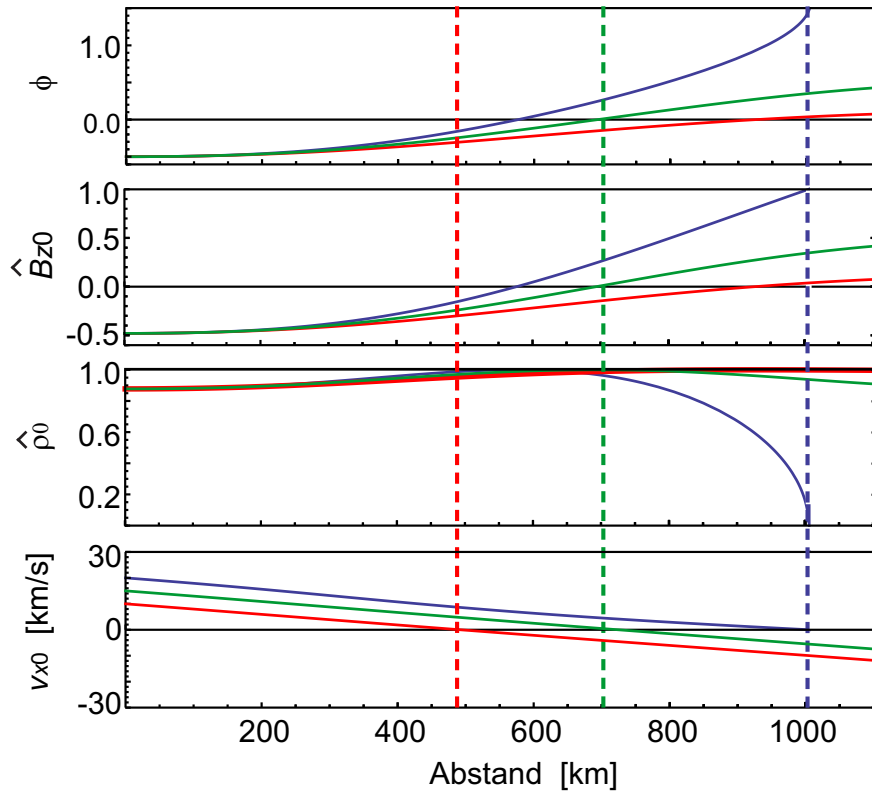


Abbildung 5.4: Exemplarische Lösungen der Gleichungen (5.18) und (5.19) für verschiedene Werte von  $v_{rec}$  in blau, rot und grün. Eine verschwindende Geschwindigkeit definiert den Stagnationspunkt, welche durch eine vertikale gestrichelte Linie hervorgehoben ist. Es wird die normierte Dichte  $\hat{\rho}_0 = \rho_0 / (p_{tot}/k_P)^{0.5}$  und das normierte Magnetfeld  $\hat{B}_{z0} = B_{z0} / (2\mu_0 p_{tot})^{0.5}$  gezeigt. Die Lösung in blau zeigt eine vollständige Umwandlung des Gasdrucks in magnetischen Druck am Stagnationspunkt.

Die Randbedingung (5.29) entsteht aus den Ableitungen zweiter Ordnung bezüglich des Ortes durch die Erweiterung der MHD-Gleichungen um eine endliche elektrische Leitfähigkeit. Um die Auswirkungen dieser Randbedingung zu untersuchen, wird das hier betrachtete erweiterte Reihenentwicklungsmodell nullter Ordnung für verschiedene Randbedingungen gelöst. Für eine numerische Berechnung ist das Lösen der Gleichungen (5.18) und (5.19) nach  $v_{x0}$  und  $\phi$  besser geeignet als das Lösen der Rekonnexionsdifferenzialgleichung, da durch die Rechenoperationen wie die Division durch  $\phi'$  Singularitäten auftreten können. Die Lösung der Gleichungen (5.18) und (5.19) für verschiedene Werte von  $v_{rec}$  ist in Abbildung 5.4 dargestellt. Als Randbedingungen wurden  $\phi(0) = -0.5$  und  $\phi'(0) = 0/\text{km}$  verwendet. Für die Geschwindigkeit am Einströmrund wird  $v_{x0}(0) = 2.0 \text{ km/s}$ ,  $v_{x0}(0) = 1.5 \text{ km/s}$  und  $v_{x0}(0) = 1.0 \text{ km/s}$  gewählt. Die Koeffizienten erster Ordnung sind  $v_{y10} = v_{z01} = 10^{-3} \text{ /s}$  und  $B_{x01} = 0 \text{ nT/km}$ . Wie in den MHD-Simulationen aus Kapitel 2.3 ist die Resistivität  $\eta_0 = 5 \cdot 10^4 \text{ Vm/A}$ .

Da die Magnetopause in dieser Arbeit durch eine verschwindende Normalkomponente der Geschwindigkeit definiert ist, gilt dort  $v_{x0} = 0$ . Verschiedene Werte für  $v_{rec}$  sind verknüpft mit unterschiedlichen Abständen des X-Punktes zur Magnetopause. Wie

in Abbildung 5.4 zu sehen, steigt der Wert von  $\phi$  an der Magnetopause mit steigender Geschwindigkeit  $v_{\text{rec}}$  an, bis der Winkel den Wert  $\pi/2$  bei einer bestimmten maximalen Geschwindigkeit erreicht. Für diesen Fall ist der Gasdruck an der Magnetopause vollständig in magnetischen Druck umgewandelt. Bei einer weiteren Erhöhung der Geschwindigkeit  $v_{\text{rec}}$  tritt kein Stagnationspunkt mehr auf und somit existiert keine sinnvolle stationäre Lösung in der Magnetosheath. In den anderen gezeigten Fällen ist die Druckumwandlung an der Magnetopause nicht vollständig und geht dahinter weiter. Dabei ist die Strömungsgeschwindigkeit in der Magnetosphäre negativ, das heißt gegen die Magnetopause gerichtet. Folglich strömt in solchen Fällen Plasma von beiden Seiten auf die Magnetopause zu. Die Einstömungsgeschwindigkeit von der magnetosphärischen Seite kann beispielsweise durch Konvektionsströmungen zustande kommen. Der konkrete Wert für die Einstömungsgeschwindigkeit lässt sich durch die Randbedingung (5.25) festlegen.

Für alle in Abbildung 5.4 betrachteten Fälle verhält sich der Dichte-Magnetfeld-Winkel in einer Umgebung um den X-Punkt etwa linear. Daher liegt es nahe,  $\phi$  durch eine Reihenentwicklung um den X-Punkt darzustellen:

$$\phi(\tilde{x}) = \sum_{i=0}^{N_\phi} \phi_i (\tilde{x} - \tilde{x}_{\text{rec}})^i. \quad (5.30)$$

Um eine erste analytische Approximation für die Lösung zu erhalten, wird die Reihenentwicklung nach der zweiten Ordnung ( $N_\phi = 2$ ) abgebrochen. Die Randbedingung (5.24) ergibt  $\phi_0 = 0$  und Gleichung (5.29) führt auf

$$\phi_2 = \frac{v_{\text{rec}}}{2 D_{\text{B},0}} \phi_1. \quad (5.31)$$

Mit diesen Ergebnissen ist die nach der zweiten Ordnung abgebrochene Reihenentwicklung (5.30) gegeben durch

$$\phi(\tilde{x}) = \left( (\tilde{x} - \tilde{x}_{\text{rec}}) + \frac{v_{\text{rec}}}{2 D_{\text{B},0}} (\tilde{x} - \tilde{x}_{\text{rec}})^2 \right) \phi_1, \quad (5.32)$$

wobei noch der Koeffizient  $\phi_1$  zu bestimmen ist.

Dieser Ansatz wird in die Rekonnexionsdifferentialgleichung (5.23) unter Verwendung des resistiven Quellterms (5.28) eingesetzt. Die dann resultierende Gleichung wird an der Stelle  $\tilde{x} = \tilde{x}_{\text{rec}}$  ausgewertet, was den Entwicklungskoeffizienten  $\phi_1$  bestimmt zu

$$\phi_1 = \pm \frac{\sqrt{D_{\text{B},0} (v_{y10} + 2 v_{z01}) - v_{\text{rec}}^2}}{D_{\text{B},0}}. \quad (5.33)$$

Weil die Koeffizienten  $\phi_1$  und  $\phi_2$  reelle Zahlen sind, muss der Term unter der Wurzel positiv sein. Dies führt zu folgender Bedingung:

$$v_{\text{rec}}^2 \leq D_{\text{B},0} (v_{y10} + 2 v_{z01}). \quad (5.34)$$

Der funktionale Zusammenhang dieser Relation bleibt auch erhalten, wenn Entwicklungskoeffizienten höherer Ordnung die Reihenentwicklung (5.30) mit einbezogen werden.

Eine approximative Lösung für den Winkel  $\phi$  erhält man, indem die Ergebnisse für  $\phi_1$  aus Gleichung (5.33) in Ansatz (5.32) eingesetzt werden:

$$\phi(\tilde{x}) = \pm \left( (\tilde{x} - \tilde{x}_{\text{rec}}) + \frac{v_{\text{rec}}}{2 D_{\text{B},0}} (\tilde{x} - \tilde{x}_{\text{rec}})^2 \right) \frac{\sqrt{D_{\text{B},0} (v_{y10} + 2 v_{z01}) - v_{\text{rec}}^2}}{D_{\text{B},0}}. \quad (5.35)$$

Die Lösungen werden in Gleichung (5.22) substituiert. Durch eine Reihenentwicklung um  $\tilde{x}_{\text{rec}}$  ergibt sich die Geschwindigkeitsverteilung

$$v_{x0} = v_{\text{rec}} - (v_{y10} + v_{z01}) (\tilde{x} - \tilde{x}_{\text{rec}}) + \left( 7 v_{\text{rec}}^3 - 5 D_{\text{B},0} v_{\text{rec}} v_{y10} - 11 D_{\text{B},0} v_{\text{rec}} v_{z01} \right) \frac{1}{2 D_{\text{B},0}^2} (\tilde{x} - \tilde{x}_{\text{rec}})^2 + \dots \quad (5.36)$$

Werden nur die nullte und erste Ordnung berücksichtigt, ergibt sich

$$v_{x0} = v_{\text{rec}} - (v_{y10} + v_{z01}) (\tilde{x} - \tilde{x}_{\text{rec}}). \quad (5.37)$$

### 5.3.2 Geometrie der Diffusionsregion

Die Magnetopausenlage auf der Stagnationslinie fällt mit dem Stagnationspunkt am Ursprung des Koordinatensystems  $\tilde{x}_{\text{st}} = 0$  zusammen, sodass dort  $v_{x0}(\tilde{x}_{\text{st}}) = 0$  ist. Der Abstand zwischen dem X-Punkt der Rekonnexion und dem Stagnationspunkt  $\Delta x_{\text{rec}} := \tilde{x}_{\text{st}} - \tilde{x}_{\text{rec}} = -\tilde{x}_{\text{rec}} > 0$  wird im Folgenden berechnet. Dazu wird der Fall vollständiger Umwandlung von Gasdruck in magnetischen Druck betrachtet, was eine obere Abschätzung der Länge angibt.

Für eine Auswertung von Gleichung (5.37) an der Stelle  $\tilde{x} = \tilde{x}_{\text{st}} = 0$ , ergibt sich

$$\Delta x_{\text{rec}} = \frac{v_{\text{rec}}}{v_{y10} + v_{z01}}. \quad (5.38)$$

Nach dem Sweet-Parker-Modell findet die Beschleunigung des Plasmas bei magnetischer Rekonnexion im Wesentlichen entlang der Magnetfeldrichtung statt, sodass  $v_{y10} \ll v_{z01}$  angenommen werden kann. Dann reduziert sich Gleichung (5.38) auf

$$\Delta x_{\text{rec}} \approx \frac{v_{\text{rec}}}{v_{z01}} \quad (5.39)$$

und Ungleichung (5.34) auf

$$v_{\text{rec}}^2 \leq 2 D_{\text{B},0} v_{z01}. \quad (5.40)$$

Dann folgt die Bedingung

$$v_{\text{rec}} \leq \frac{2 \eta_0}{\mu_0 \Delta x_{\text{rec}}}. \quad (5.41)$$

Am Stagnationspunkt, mit der Bedingung vollständiger Druckumwandlung in magnetischen Druck, ist  $\phi(\tilde{x} = \tilde{x}_{\text{st}}) = \pi/2$ . Dann ergibt sich aus Gleichung (5.35) unter der Annahme  $v_{y10} \ll v_{z01}$  die Bedingung

$$\frac{\pi}{2} = \pm \left( \Delta x_{\text{rec}} + \frac{v_{\text{rec}}}{2 D_{\text{B},0}} \Delta x_{\text{rec}}^2 \right) \frac{\sqrt{2 v_{z01} D_{\text{B},0} - v_{\text{rec}}^2}}{D_{\text{B},0}}. \quad (5.42)$$

Diese Gleichung bestimmt den Abstand des Rekonnexionspunktes zum Stagnationspunkt. Die Abschätzung dieser Länge in Ungleichung (5.41) legt folgenden Ansatz für die Lösung nahe:

$$\Delta x_{\text{rec}} = a_{\text{st}} \frac{D_{\text{B},0}}{v_{\text{rec}}}, \quad (5.43)$$

mit einer zu bestimmenden Konstanten  $a_{\text{st}}$ . Diese lässt sich bestimmen, indem Gleichung (5.39) und Ansatz (5.43) in Gleichung (5.42) eingesetzt wird:

$$\pm \frac{\pi}{2} = a_{\text{st}} \left( 1 + \frac{a_{\text{st}}}{2} \right) \sqrt{\frac{2}{a_{\text{st}}} - 1}. \quad (5.44)$$

Diese Bestimmungsgleichung für  $a_{\text{st}}$  ist durch den hinteren Term beschränkt mit  $0 < a_{\text{st}} \leq 2$  und damit konsistent mit Ungleichung (5.41). Die numerischen Lösungen sind  $a_{\text{st}} \approx 1.22$  und  $a_{\text{st}} \approx 1.34$ , sodass sich ein mittlerer Wert von  $a_{\text{st}} \approx 1.28$  angeben lässt. Die Ergebnisse stimmen mit den numerischen Rechnungen, die in Abbildung 5.4 gezeigt wurden, überein.

Die Resultate der analytischen Näherung für die endliche, homogene Leitfähigkeit an der Magnetopause lassen sich mit den Ergebnissen des symmetrischen Sweet-Parker-Modells vergleichen. Da das Sweet-Parker-Modell eine zweidimensionale Rekonnexions-situation betrachtet, wird das hier betrachtete Modell zunächst auf die  $xz$ -Ebene durch  $v_{y10} = 0$  eingeschränkt. Gleichung (5.39) kann in Gleichung (5.43) eingesetzt werden, um den Abstand  $\Delta x_{\text{rec}}$  zu eliminieren. Dies führt auf

$$v_{\text{rec}}^2 = a_{\text{st}} \frac{\eta_0}{\mu_0} v_{z01}. \quad (5.45)$$

Die Sweet-Parker Relationen (1.42), (1.44) und (1.45) aus Kapitel 1.5 ergeben ihrerseits

$$v_{\text{in}}^2 = \frac{\eta}{\mu_0} \partial_z v_z. \quad (5.46)$$

Der Koeffizient  $v_{z01}$  entspricht der partiellen Ableitung  $\partial_z v_z$  nahe der Stagnationslinie, was für das Sweet-Parker-Modell

$$v_{\text{in}}^2 = \frac{\eta}{\mu_0} v_{z01} \quad (5.47)$$

bedeutet. Diese Relation ist ähnlich zu der hier abgeleiteten Relation (5.45) für die Rekonnexion an der Magnetopause unter vollständiger Druckumwandlung in magnetischen Druck am Stagnationspunkt. Man kann erkennen, dass sich die Einströmgeschwindigkeit des Sweet-Parker-Modells mit der Geschwindigkeit am X-Punkt der Rekonnexion  $v_{\text{rec}}$  identifiziert lässt. Im klassischen Sweet-Parker-Modell verschwindet aufgrund der symmetrischen Einströmsituation die Geschwindigkeit am X-Punkt. Weiterhin entspricht die Breite der Diffusionsregion im Sweet-Parker-Modell  $d_{\text{sp}}$  über Gleichung (1.45) dem Abstand der Magnetopause zum X-Punkt  $\Delta x_{\text{rec}}$  aus Relation (5.43).

Nach diesen Ausführungen bezüglich des resistiven Quellterms wird im Folgenden kurz der Einfluss des Hall-Terms auf die Rekonnexionsregion untersucht. Diese Betrachtung ist jedoch deutlich komplizierter. Dies liegt daran, dass sich die Magnetfeldbeschreibung nicht mehr ausschließlich auf die niedrigsten Ordnungen reduzieren lässt. Wird der

zugehörige Quellterm (5.13) in Gleichung (5.25) für  $N_{z0}$  substituiert, ergibt sich mit der Randbedingung (5.24) für die Geschwindigkeit im X-Punkt

$$v_{\text{rec}} = \frac{m_i}{e} \frac{B_{y01} - B_{z10}}{\rho_0}. \quad (5.48)$$

Geht man nun von einem verschwindenden Hall-Magnetfeld im Rekonnexionspunkt aus, ergibt sich  $v_{\text{rec}} = 0$ . Unter dieser Voraussetzung lässt sich anhand der Geschwindigkeit im Rekonnexionspunkt zwischen Rekonnexion durch den resistiven Term und Rekonnexion durch den Hall-Term unterscheiden. Allerdings ist in der Regel auch bei Hall-Rekonnexion eine endliche elektrische Leitfähigkeit präsent, weshalb es zu einer endlichen Geschwindigkeit im X-Punkt kommt.

## 5.4 Magnetopausenlage bei südwärtigem Sonnenwindmagnetfeld

Magnetische Rekonnexion beeinflusst nicht nur die Verteilung der elektrischen Ströme in der Magnetosheath, sondern auch die Lage der Magnetosheath. Nach Mead und Beard (1964) lässt sich die Position der Magnetopause aus dem Druckgleichgewicht zwischen dem dynamischen Druck im Sonnenwind und dem magnetischen Druck der Magnetosphäre über Gleichung (4.101) bestimmen. Die Lage der Magnetopause am subsolaren Punkt ergibt sich dann über Gleichung (4.103). Vergleiche mit Modellen von Shue et al. (1998) bestätigen die Gültigkeit dieser Gleichung für ein nordwärtiges Sonnenwindmagnetfeld. Für ein südwärtiges Sonnenwindmagnetfeld, also eines mit einer signifikanten Komponente parallel zum Dipolmoment der Erde, werden Magnetopausenabstände beobachtet, die kleiner sind als durch Gleichung (4.103) bestimmt. Dieser Effekt wurde in den 70er Jahren entdeckt und wird auch als Erosion der Magnetopause bezeichnet (Aubry et al. 1970, Fairfield 1971). Kovner und Feldstein (1973) interpretierten die Erosion als ein Durchdringen des Magnetfeldes der Magnetosheath in die Magnetosphäre, weil das Magnetfeld direkt hinter der Magnetopause kleiner war als nach dem Modell von Mead und Beard (1964). Dabei wird die Ursache dieses Durchdringens allerdings nicht beantwortet (Pudovkin et al. 2002).

Die Erosion der Magnetopause unter südwärtigem Sonnenwindmagnetfeld lässt sich auch für eine quasi-stationäre Magnetosphäre in MHD-Simulationen beobachten. Es wurde zuvor gezeigt, dass sich der magnetische Druck vor dem X-Punkt der Rekonnexion entlang der Stagnationslinie durch magnetische Rekonnexion in Gasdruck umwandelt und dann, zum Stagnationspunkt hin, wieder in magnetischen Druck umwandelt. Dabei ändert der Umwandlungsprozess nichts an dem Druck aus dem Sonnenwind, der an der Magnetopause als magnetischer Druck der ankommenden Strömung vorliegt. Die einzige Möglichkeit die Magnetopausenposition für gleiche Sonnenwindbedingungen zu ändern sind elektrische Ströme außerhalb der Magnetosheath, die den magnetischen Druck seitens der Magnetosphäre verändern.

Hill und Rassbach (1975) sowie Maltsev und Liatskii (1975) schlugen vor, diese elektrischen Ströme mit den feldparallelen Birkeland-Strömen zu identifizieren. Betrachtet man die elektrischen Ströme innerhalb der Magnetosheath, sind diese für ein nordwärtiges Magnetfeld in der tagseitigen Magnetosheath ostwärts gerichtet. Dann springt zu-

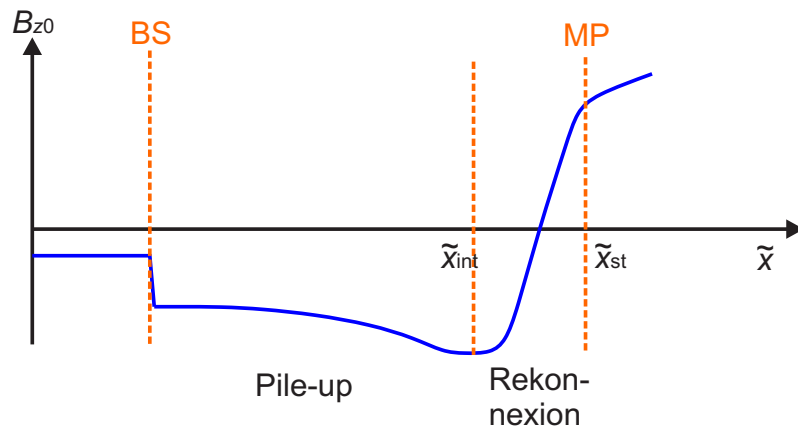


Abbildung 5.5: Skizze der Magnetfeldverteilung entlang der Stagnationslinie für südwärtsiges Sonnenwindmagnetfeld zwischen der Bugstoßwelle (BS) und der Magnetopause (MP). Die Region des sich negativ anstauenden Magnetfeldes (Pile-up) geht in die Rekonnectionsregion über.

nächst das Magnetfeld an der Bugstoßwelle auf einen höheren Wert und steigt danach weiter, bis zur Magnetopause hin, an. Im Gegensatz dazu sind für ein südwärtsiges Sonnenwindmagnetfeld die elektrischen Ströme sowohl ostwärts als auch westwärts gerichtet. Dabei springt die Magnetfeldstärke von kleinen zu größeren negativen Werten an der Bugstoßwelle und anschließend staut sich das negative Magnetfeld in der Magnetosheath weiter an (siehe Abb. 5.5). In diesem Teil der Magnetosheath sind folglich westwärtige elektrische Ströme zu erwarten, wohingegen die Feldstärke hinter dem Grenzpunkt  $\tilde{x}_{\text{int}}$  wieder ansteigt, was mit ostwärtigen elektrischen Strömen einhergeht.

Magnetische Rekonnection kann die Magnetosphäre öffnen, sodass sich Feldlinien des Magnetfeldes der inneren Magnetosphäre mit Feldlinien in der Magnetosheath verbinden können und in die Ionosphäre führen. Aufgrund der hohen elektrischen Leitfähigkeit entlang von Feldlinien sowie in der Ionosphäre ist es möglich, dass die westwärtigen elektrischen Ströme der Magnetosheath nahe der Cusp-Region entlang der Feldlinien des Erdmagnetfeldes über die Ionosphäre geschlossen werden, wie von Hill und Rassbach (1975) sowie Maltsev und Liatskii (1975) vorgeschlagen. Dann kann ein elektrischer Strom sowohl über die nördliche Cusp-Region als auch über die südliche Cusp-Region fließen. Auch anderer Ströme, wie zum Beispiel der Neutralschichtstrom, können durch das Sonnenwindmagnetfeld beeinflusst werden, sodass dies zu einer Erosion der Magnetopause führt.

Um die Effekte solcher Ströme zu untersuchen, wird angenommen, dass sie sich durch eine planare Stromschicht senkrecht zur  $x$ -Richtung des Reihenentwicklungsmodells approximieren lassen, welche dieselbe Stromdichte wie die westwärtigen Ströme in der Magnetosheath besitzt. Weiterhin wird das Anstauen des negativen Magnetfeldes vernachlässigt und sich im Wesentlichen auf den elektrischen Strom an der Bugstoßwelle beschränkt. Das Feld an der Bugstoßwelle springt von  $B_{\text{SW}}$  auf  $B_{\text{SW}}/g_B$ , wie in Gleichung (4.45) beschrieben. Somit ist das Magnetfeld des elektrischen Schließungsstroms

bei der Magnetopause durch

$$\vec{B}_{j,\text{ext}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{B}_{\text{SW}}}{g_B} - \vec{B}_{\text{SW}} \right) \quad (5.49)$$

gegeben, wobei hier  $\vec{B}_{\text{SW}} = (0, 0, B_{\text{SW}})^T$  ist.

In der Formulierung des magnetosphärischen Drucks von Mead und Beard (1964) in Gleichung (4.80) wurde das Erdmagnetfeld als einziges externes Magnetfeld angenommen und der Einfluss eines Sonnenwindmagnetfeldes vernachlässigt. Im Gegensatz dazu werden hier, um die Auswirkungen eines südwärtigen Sonnenwindmagnetfeldes abzuschätzen, das Sonnenwindmagnetfeld und das Magnetfeld des Schließungsstroms mit berücksichtigt. Dazu wird das Erdmagnetfeld in Gleichung (4.80) ersetzt durch das gesamte externe Magnetfeld:  $\vec{B}_E \leftarrow \vec{B}_E + \vec{B}_{j,\text{ext}} + \vec{B}_{\text{SW}}$ . Es folgt für den magnetosphärischen Druck  $p_{\text{tot,MP},2}$  dann

$$p_{\text{tot,MP},2} = \frac{\left( f \left( \vec{B}_E + \vec{B}_{j,\text{ext}} + \vec{B}_{\text{SW}} \right) \times \vec{\xi}_{\text{MP}} \right)^2}{2 \mu_0}. \quad (5.50)$$

Mit  $p_{\text{tot,MP}} \leftarrow p_{\text{tot,MP},2}$  in Gleichung (4.101) ergibt sich am Stagnationspunkt ( $y = z = 0$ ) der zugehörige Magnetopausenabstand  $\Delta x_{\text{MP},2}$  zu

$$\Delta x_{\text{MP},2} = \left( \frac{M}{\frac{\sqrt{2 \mu_0 K_{\text{dyn}} \rho_{\text{SW}} v_{\text{SW}}^2}}{f} - \frac{1}{2} \frac{1+g_B}{g_B} B_{\text{SW}}} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (5.51)$$

Der rechte Term im Nenner dieses Ausdrucks beschreibt dabei die Modifikation des Magnetopausenabstands durch das südwärtige Sonnenwindmagnetfeld.

Die Ergebnisse für einen Sonnenwind mit  $v_{\text{SW}} = 400 \text{ km/s}$ ,  $N_{\text{SW}} = 8/\text{cm}^3$  und  $p_{\text{SW}} = 0.01 \text{ nPa}$  sowie  $M = 7.6 \cdot 10^{15} \text{ T m}^3$  sind in Abbildung 5.6 dargestellt. Dabei wurde das Dipolmoment  $M$  so gewählt, dass der Magnetopausenabstand beider Modelle für einen magnetfeldfreien Sonnenwind übereinstimmt. Der Magnetopausenabstand verringert sich für ein stärkeres negatives Sonnenwindmagnetfeld. Dabei nimmt die Steigung der Kurve zu größeren Sonnenwindmagnetfeldern hin ab. Die Ergebnisse werden mit dem empirischen Modell von Shue et al. (1998) nach Gleichung (2.35) verglichen. Beide Modelle zeigen ein ähnliches Verhalten. Das Shue-Modell zeigt eine Sättigung bei hohen Sonnenwindmagnetfeldstärken. Dabei wurden allerdings nur Daten mit Sonnenwindbedingungen größer als  $-20 \text{ nT}$  für das Modell verwendet, sodass über den genauen Verlauf bei hohen Feldstärken nicht viel ausgesagt werden kann. In dem Bereich von  $-20 \text{ nT} < B_{\text{SW}} < 0 \text{ nT}$  zeigen beide Modelle ein ähnliches Verhalten.

Für das hier hergeleitete analytische Modell für die Erosion der Magnetopause wurden stark einschränkende Annahmen für den Schließungsstrom gemacht, die noch weiter überprüft werden müssen. Bei der Erde zeigt sich schon eine relativ gute Übereinstimmung zwischen den Modellresultaten und Daten, jedoch muss dieser Zusammenhang noch besser verstanden werden, um eine Übertragung des Modells für Merkur zu ermöglichen. Es müsste für eine genauere Betrachtung insbesondere die dreidimensionale Geometrie des Schließungsstromes besser berücksichtigt werden. Dabei muss auch geklärt werden, welches Stromsystem der Magnetosphäre hauptsächlich für die Erosion verantwortlich ist.

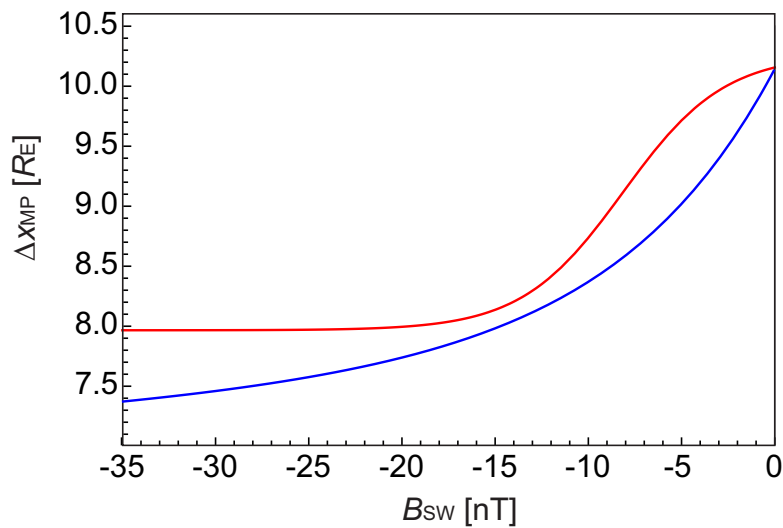


Abbildung 5.6: Der subsolare Magnetopausenabstand in Abhängigkeit von der  $z$ -Komponente des Sonnenwindmagnetfeldes. Dabei wird der über Gleichung (5.51) berechnete Abstand (blau) verglichen mit dem Abstand aus dem Modell von Shue et al. (1998) (rot).

## 5.5 Schätzung der Resistivität durch Diffusion<sup>3</sup>

Die Resistivität beziehungsweise die Leitfähigkeit des Plasmas stellt einen wichtigen Parameter in der MHD-Beschreibung der Wechselwirkung zwischen dem Sonnenwind und dem planetaren Magnetfeld dar. Dieser Parameter lässt sich mit den zuvor hergeleiteten Beziehungen aus Magnetfelddaten von Raumfahrtmissionen abschätzen.

Dazu wird ausgenutzt, dass auch ohne Sonnenwindmagnetfeld eine endliche Resistivität die Magnetfeldverteilung an der Magnetopause beeinflusst. Die endliche Leitfähigkeit ruft magnetische Diffusion hervor, sodass das planetare Magnetfeld in die Magnetosheath eindringt, was den Magnetfeldanstieg an der Magnetopause verbreitert. Dieser Effekt beruht dabei auf dem resistiven Quellterm (1.36) und ist von einem magnetischen Pile-up zu unterscheiden, bei dem sich das nordwärtige Sonnenwindmagnetfeld vor der Magnetopause anstaut. Um den Diffusionsprozess abzuschätzen, werden die Berechnungen aus Kapitel 5.3 zusammen mit Ergebnissen aus Kapitel 4.2 genutzt. Es sei bemerkt, dass die Reihenentwicklungsmodelle der idealen MHD und die Erweiterung um Terme der nicht-idealen MHD unterschiedliche Koordinatensysteme nutzen.

Es wird im Folgenden eine Situation ohne Sonnenwindmagnetfeld betrachtet, sodass sich kein Sonnenwindmagnetfeld in der Magnetosheath anstauen kann. Aufgrund der magnetischen Diffusion für eine hier betrachtete endliche Resistivität gibt es einen Punkt  $\tilde{x}_{\text{diff}}$  in der Magnetosheath nahe des Stagnationspunktes, ab dem das Magnetfeld beginnt signifikant anzusteigen. Dabei wird angenommen, dass das Magnetfeld an diesem Punkt noch Null ist. Dann lässt sich dieser Punkt mit dem X-Punkt der Rekonnexion identifizieren, an dem die Magnetfeldamplitude verschwindet, sodass  $\tilde{x}_{\text{diff}} = \tilde{x}_{\text{rec}}$  für den Fall eines

---

<sup>3</sup>Der Inhalte dieses Kapitels ist bei Nabert und Glassmeier (2016b) entnommen.



magnetfeldfreien Sonnenwinds gilt.

Die Geschwindigkeit in der Magnetosheath ohne ein Sonnenwindmagnetfeld nimmt im Rahmen der idealen MHD gemäß des Reihenentwicklungsmodells nullter Ordnung eähnlichentlang der Stagnationslinie linear ab, was durch Gleichung (4.87) mit dem Koeffizienten der Geschwindigkeitsabnahme aus Gleichung (4.91) beschrieben wird. Derselbe lineare Geschwindigkeitsabfall setzt sich auch in ein Gebiet endlicher Resistivität fort, wie zuvor in Gleichung (5.37) gezeigt. Kombiniert man den linearen Geschwindigkeitsabfall nach Gleichung (4.87) für den Fall eines magnetfeldfreien Sonnenwinds und Gleichung (5.37), ergibt sich<sup>4</sup>

$$v_{\text{rec}} = v_{\text{BS}} \frac{\Delta x_{\text{st}}}{x_{\text{MS}}}. \quad (5.52)$$

Zusammen mit Gleichung (5.43) ergibt sich die Resistivität zu

$$\eta_0 = \frac{\mu_0}{a_{\text{st}}} \frac{v_{\text{BS}}}{x_{\text{MS}}} \Delta x_{\text{st}}^2. \quad (5.53)$$

Dabei gibt  $\Delta x_{\text{st}}$  den Abstand von  $\tilde{x}_{\text{diff}}$  zum Stagnationspunkt an.

Berchem und Russell (1982) nutzten ISEE 1 und 2 Beobachtungen von Magnetfeldprofilen, um die Dicke der Magnetopause aus der lokalisierten Stromschicht an der Magnetopause zu bestimmen. In den Definitionen dieser Arbeit besitzt die Magnetopause keine endliche Dicke und der Anstieg des Magnetfeldes wird als Teil der Magnetosheathlösung angesehen. Daher beschreibt die Dicke der Magnetopause aus Berchem und Russell (1982) den Abstand  $\Delta x_{\text{st}}$ , wo das Magnetfeld sich auch ohne Pile-up stark ändert. Sie geben einen mittleren Wert von etwa  $\Delta x_{\text{st}} \approx 583$  km nahe des subsolaren Punkts an. Für die Sonnenwindbedingungen bei der Erde aus Tabelle 1.1 ergibt sich nach Gleichung (4.93) eine mittlere Magnetosheathdicke von  $2.9 R_E$ . Weiterhin ergibt sich nach den Rankine-Hugoniot-Bedingungen eine Geschwindigkeit hinter dem subsolaren Punkt der Bugstoßwelle von  $v_{\text{BS}} = 116$  km/s. Wird wie zuvor beschrieben  $a_{\text{st}} = 1.28$  gewählt, folgt mit Gleichung (5.53) eine Resistivität von  $\eta_0 = 0.21 \cdot 10^4$  Vm/A. Eine etwas größere mittlere Dicke von  $\Delta x_{\text{st}} \approx 700$  km würde auf einen Wert der Resistivität von  $\eta_0 = 0.30 \cdot 10^4$  Vm/A führen. Die Werte nach Gleichung (5.53) liegen im gleichen Bereich wie der von Alexeev (1986) angegebene Wert von  $\eta = 0.3 \cdot 10^4$  Vm/A, der aus einer Abschätzungen der ionenakustischen Instabilität gewonnen wurde. Die Spitzer Resistivität, die durch klassische Teilchenstößen hervorgerufen wird, ist für eine Temperatur von  $10^5$  K und einem Coulomb-Logarithmus von 20 um 7 Größenordnungen kleiner als dieser Wert (Spitzer 1956). Dieses Ergebnis ist in Übereinstimmung mit beobachteten Rekonnexionsraten an der Magnetopause. Jedoch der hier geschätzte Wert der Resistivität um mehr als eine Größenordnung kleiner als der in den MHD-Simulationen aus Kapitel 2 und 3 verwendete Wert für die Plasmaresistivität von  $\eta = 5 \cdot 10^4$  Vm/A. Dabei ist auch der kleinste mögliche Wert  $\eta = 2.7 \cdot 10^4$  Vm/A, bei dem eine stabile Simulation noch möglich war um eine Größenordnung größer (siehe Kap. 4.6). Folglich ist es nicht möglich, die korrekten Werte für eine elektrische Leitfähigkeit des Plasmas in den MHD-Simulationen zur Parameterschätzung zu verwenden.

<sup>4</sup>Eine zu Relation (5.53) ähnliche Beziehung wird auch bei Heyner et al. (2016) benutzt, um die Dicke einer Rekonnexionsregion abzuschätzen. Dort wurde die Beziehung aus Skalenabschätzungen des Sweet-Parker Modells gewonnen, ohne die Situation an der Magnetopause genauer zu betrachten.

Eine ähnliche Schätzung der Resistivität lässt sich auch mit MESSENGER-Daten bei Merkur durchführen. Von Winslow et al. (2013) wurde ein mittlerer Magnetopausenabstand von  $1.45 R_M$  bestimmt. Weiterhin wird ein mittlerer Bugstoßwellenabstand von  $1.96 R_M$  angegeben. Die mittlere Sonnenwindgeschwindigkeit wird nach Tabelle 1.1 mit 430 km/s angenommen. Mit den Sonnenwindbedingungen für den Sonnenabstand von Merkur bei 0.31 AU ergibt sich eine Geschwindigkeit hinter der Bugstoßwelle von  $v_{BS} = 143$  km/s. Für den Fall eines Abstands von Merkur zur Sonne von 0.47 AU ist  $v_{BS} = 127$  km/s. Dies ergibt eine mittlere Geschwindigkeit von  $v_{BS} = 135$  km/s. Die mittlere Dicke der Magnetopause wurde aus Magnetfeldbeobachtungen von Dibraccio et al. (2013) aus MESSENGER-Daten mit 43 Magnetopausendurchgängen bestimmt zu  $\Delta x_{st} = 97.3$  km. Mit diesen Werten lässt sich über Gleichung (5.53) die Resistivität an der subsolaren Magnetopause berechnen zu  $\eta_0 = 0.1 \cdot 10^4$  Vm/A. Folglich liegen die Resistivitäten an der subsolaren Magnetopause von Merkur und Erde in der gleichen Größenordnung.

Im Rahmen der idealen MHD wurde gezeigt, dass die Dichte der Magnetosheath am Stagnationspunkt verschwindet und der gesamte Druck als magnetischer Druck am Stagnationspunkt vorliegt. Ein endliches Sonnenwindmagnetfeld kann sich dabei vor der Magnetopause anstauen. Für den Grenzfall eines verschwindenden Sonnenwindmagnetfeldes bleibt die Magnetosheath magnetfeldfrei. Wird eine endliche elektrische Leitfähigkeit im Plasma berücksichtigt, dann kann das planetare Magnetfeld in die Magnetosheath, das heißt in die Umströmungsregion, durch Diffusion eindringen. Liegt ein südwärtiges Sonnenwindmagnetfeld vor, dann ergibt sich eine antiparallele Magnetfeldkonfiguration zwischen dem diffundierten planetaren Magnetfeld und dem Sonnenwindmagnetfeld. Dies führt zu magnetischer Rekonnexion, bei der magnetische Energie in thermische und kinetische Energie umgewandelt wird.

Durch die Erweiterung der MHD-Gleichungen um eine endliche Leitfähigkeit treten Terme mit zweiten Ableitungen auf, die zusätzliche Randbedingungen für eine stationäre Lösung erfordern. Dadurch muss, im Gegensatz zur idealen MHD, am Stagnationspunkt nicht zwangsweise eine vollständige Umwandlung des Drucks in magnetischen Druck vorliegen. Dabei bestimmen die magnetosphärischen Bedingungen, wie zum Beispiel eine Konvektionsströmung in der Magnetosphäre gegen die Magnetopause, den Grad der Druckumwandlung.

## 6 Einfluss einer inhomogenen Resistivität auf die Bedingungen für Stoßwellen<sup>1</sup>

Im vorherigen Kapitel wurde magnetische Rekonnexion aufgrund einer antiparallelen Magnetfeldkonfiguration in der Magnetosheath betrachtet. Dabei stand die in die Magnetosheath eingebettete Lösung im Zusammenhang mit den Sweet-Parker-Relationen. Bei diesen Rekonnexionsprozessen vom Sweet-Parker-Typ wird durch Diffusion des antiparallelen Magnetfeldes in einer Region endlicher elektrischer Leitfähigkeit magnetische Energie in thermische und kinetische Energie umgewandelt. Petschek (1964) schlug vor, dass auch langsame Stoßwellen (englisch: slow shocks) zu einer solchen Energieumwandlung beitragen können. Solche Stoßwellen können die Geometrie der Rekonnexionsregion verändern und die Plasmaströmung beeinflussen. Plasmasimulationen von magnetischer Rekonnexion haben gezeigt, dass eine lokale Erhöhung der Resistivität auf eine Lösung mit langsamen Stoßwellen führen kann (siehe z. B. Ugai und Tsuda 1977, Scholer 1989, Yan et al. 1992). Beispielsweise sind Mikroinstabilitäten in der Lage eine lokal erhöhte Resistivität hervorzurufen (siehe z. B. Treumann 2001). Solche Vorgänge, die zu einer veränderten Resistivitätsverteilung führen, sind allerdings außerhalb einer MHD-Beschreibung.

In diesem Kapitel werden notwendige Bedingungen für das Auftreten von Stoßwellen, insbesondere nahe einer Rekonnexionsregion, in einem MHD-Plasma mit inhomogener Resistivität untersucht. MHD-Simulationen sind dafür nur bedingt geeignet, weil numerische Fehler, wie in Kapitel 4.6 gezeigt, starke Auswirkungen auf die Lösung haben können. Da auch starke Variationen einer inhomogenen Resistivitätsverteilung senkrecht zur Strömung betrachtet werden, ist die Verwendung einer Reihenentwicklungsmethode, wie sie zuvor in Kapitel 4 und 5 benutzt wurde, ebenfalls nicht sinnvoll. Deshalb wird in diesem Kapitel eine neue Methode entwickelt, mit der sich notwendige Bedingungen für Stoßwellen in einem inhomogenen resistiven MHD-Plasma analytisch herleiten lassen. Diese Bedingungen können auch mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit für Wellen im Plasma in Zusammenhang gebracht werden. Durch die Beobachtung solcher Effekte mit Raumfahrzeugen lassen sich so Rückschlüsse auf die Inhomogenität der Resistivitätsbeziehungsweise Leitfähigkeitsverteilung des Plasmas ziehen.

---

<sup>1</sup>Die Ausführungen dieses Kapitels sind im Wesentlichen aus Nabert und Glassmeier (2016a) entnommen.

## 6.1 Quasi-eindimensionale Betrachtung

Im Rahmen der idealen MHD lassen sich die Bedingungen für Stoßwellen aus den Rankine-Hugoniot-Bedingungen (1.53)–(1.58) herleiten. Dazu werden die Lösungen der Rankine-Hugoniot-Bedingungen für eine nicht-verschwindende Geschwindigkeitskomponente bezüglich der Stoßwellennormalen berechnet. Es existieren insbesondere dann Lösungen mit Stoßwellen, falls die Strömungsgeschwindigkeit größer als die magnetosonische Geschwindigkeit im Plasma ist (siehe z. B. Petrínek und Russell 1997).

Um die Bedingungen für Stoßwellen endlicher Dicke untersuchen zu können, wird eine andere Herangehensweise als das Lösen der Rankine-Hugoniot-Bedingungen benötigt. Das liegt daran, dass Stoßwellen in der resistiven MHD, im Gegensatz zur Beschreibung im Rahmen der idealen MHD, eine endliche Ausdehnung besitzen. Daher werden Termumformungen der MHD-Gleichungen betrachtet, mit denen Ausdrücke für die räumlichen Variationen der Geschwindigkeit und des Magnetfeldes aufgestellt werden. Unter gewissen Voraussetzungen haben dann hebbare Singularitäten in den Ausdrücken einen Zusammenhang mit den starken räumlichen Variationen der physikalischen Größen durch eine Stoßwelle.

Ein ähnliches Vorgehen wurde für eine eindimensionale, hydrodynamische Situation genutzt, um den Einfluss von kosmischer Strahlung auf die kritische Machzahl zu untersuchen (Achterberg 1987, Ko et al. 1997, Becker und Kazanas 2001). Weiterhin diskutierten Burgess und Scholer (2015) so die Dissipationsmechanismen von sub- und superkritischen Stoßwellen für ein Plasma mit homogener Resistivität. Dabei können jedoch in den hergeleiteten Ausdrücken die räumlichen Variationen durch eine Stoßwelle hindurch sowohl durch Terme des Zählers als auch durch Singularitäten von Nullstellen des Nenners zustande kommen. Im Gegensatz dazu ist das Auftreten von Stoßwellen in den hier hergeleiteten Ausdrücken auf die Singularitäten beschränkt. Daher geben die Singularitäten hier notwendige Bedingungen für Stoßwellen an.

Das Vorgehen zur Herleitung der Stoßwellenbedingungen der inhomogenen resistiven MHD wird anhand einer stationären, quasi-eindimensionalen Geometrie eingeführt. Das Magnetfeld ist dabei auf die  $x$ -Richtung beschränkt, das heißt  $\vec{B} = (B_x, 0, 0)^T$ . Alle physikalischen Größen hängen nur von  $z$  ab. Die Strömungsgeschwindigkeit ist entlang der  $z$ -Richtung, also  $\vec{v} = (0, 0, v_z)^T$ . Die einzige Ausnahme stellt eine Divergenz der Strömungsgeschwindigkeit dar, wodurch die Strömung abgelenkt werden kann ( $\partial_x v_x \neq 0$ ,  $\partial_y v_y \neq 0$ ). Diese Situation ist oftmals eine gute Beschreibung für die Strömung entlang einer Stagnationslinie in  $z$ -Richtung, wie am Beispiel der Umströmung des Sonnenwindes um die Erde in Kapitel 4 gezeigt wurde. Dann kann die stationäre Kontinuitätsgleichung (4.1) geschrieben werden als

$$\partial_z \rho = - \frac{\rho (\partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z)}{v_z}. \quad (6.1)$$

Die stationäre Form ( $\partial_t = 0$ ) der Induktionsgleichung (1.35) für ein Plasma mit inhomogener Resistivität  $\eta$  ist

$$\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \nabla \times \left( \frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} \right). \quad (6.2)$$

In diesem Kapitel wird im Folgenden  $\mu_0 = 1$  gesetzt. Die Induktionsgleichung (6.2) kann

nach  $\partial_z B_x$  aufgelöst werden, was auf

$$\partial_z B_x = \frac{-B_x (\partial_z v_z + \partial_y v_y) + \eta \partial_z^2 B_x}{v_z - \partial_z \eta} \quad (6.3)$$

führt. Der Nenner dieses Ausdrucks rührt aus der Modifikation des advektiven Beitrags  $v_z \partial_z B_x$  durch den Term  $(\partial_z \eta) \partial_z B_x$  der Induktionsgleichung her (Zita 2013). In der stationären Impulsbilanz (4.2) lässt sich die räumliche Variation des Drucks durch  $\partial_z p = c_s^2 \partial_z \rho$  substituieren. Werden die Gleichungen (6.1) und (6.3) in die Impulsbilanz (4.2) eingesetzt und diese dann nach  $\partial_z v_z$  aufgelöst, ergibt sich

$$\partial_z v_z = \frac{c_s^2 D_S + \kappa v_{A,x}^2 D_{A1}}{v_z^2 - c_s^2 - \kappa v_{A,x}^2}, \quad (6.4)$$

mit  $v_{A,x}$ , der  $x$ -Komponente der Alfvén-Geschwindigkeit  $\vec{v}_A := \vec{B}/\rho^{0.5}$  und  $\kappa$  definiert über

$$\kappa := \frac{v_z}{v_z - \partial_z \eta}. \quad (6.5)$$

Weiterhin wurden die Terme  $D_S := \partial_y v_y + \partial_x v_x$  und  $D_{A1} := \partial_y v_y - (\eta \partial_z^2 B_x)/B_x$  substituiert, die Modifikationen der Strömungsgeschwindigkeit berücksichtigen können. Ein Hindernis der Strömung, wie beispielsweise eine Kugel, erfordert, dass die Strömung um die Kugel herum geleitet wird. Die Ablenkung ergibt  $D_S \neq 0$ . Falls die einströmende Geschwindigkeit supersonisch ist, muss die Strömung bei der Abbremsung die Bedingung der Singularität in Gleichung (6.4) an einem Punkt erfüllen. Die resultierende Lösung ergibt dann  $D_S = 0$  vor der Stoßwelle und  $D_S \neq 0$  dahinter (siehe Kap. 4.1).

In Gleichung (6.4) skaliert die Alfvén-Geschwindigkeit  $v_{A,x}$  mit  $\kappa^{0.5}$ . Daher wird eine effektive Alfvén-Geschwindigkeit  $\tilde{v}_{A,x}$  definiert über

$$\tilde{v}_{A,x} := \sqrt{\kappa} v_{A,x}. \quad (6.6)$$

Dabei ist die Veränderung der Alfvén-Geschwindigkeit  $v_{A,x}$  auf Gradienten der Resistivität zurückzuführen. Für der Grenzfall  $\partial_z \eta \rightarrow 0$  wird die effektive Alfvén-Geschwindigkeit  $\tilde{v}_{A,x}$  zur Alfvén-Geschwindigkeit  $v_{A,x}$ .

Durch eine Stoßwelle ändern sich die physikalischen Größen, wie zum Beispiel die Strömungsgeschwindigkeit. Die Analyse wird auf approximativ senkrechte Stoßwelle beschränkt. Bei einer senkrechten Stoßwelle ist die Strömungsgeschwindigkeit orthogonal zur Stoßwelle. Dann sind die Terme  $\partial_x v_x$  und  $\partial_y v_y$  durch eine Stoßwelle klein verglichen mit  $\partial_z v_z$  und  $\partial_z B_x$ . Weiterhin wird angenommen, dass der resistive Beitrag im Zähler  $D_{A1}$  klein ist, was einer geringen Stoßwellenbreite entspricht. Unter diesen Bedingungen sind die Veränderungen des Zählers in Gleichung (6.4) beschränkt und klein verglichen mit Werten für  $\partial_z v_z$  durch eine Stoßwelle. Die großen Werte von  $\partial_z v_z$  an einer Stoßwelle sind damit auf die Umgebung von Singularitäten in Gleichung (6.4) beschränkt, welche durch

$$v_z = \pm \sqrt{c_s^2 + \tilde{v}_{A,x}^2} \quad (6.7)$$

bestimmt sind. Es sei bemerkt, dass im Rahmen der resistiven MHD die Singularitäten üblicherweise hebbbar sind und die Ableitungen stets endlich bleiben.

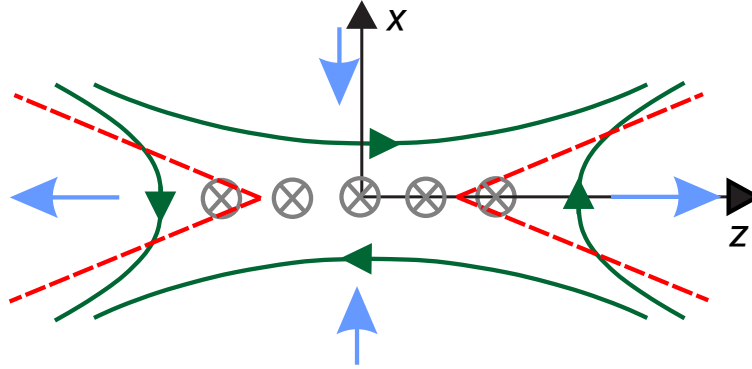


Abbildung 6.1: Darstellung der Diffusionsregion (nach Nabert und Glassmeier 2016a). Die Stromschicht der Diffusionsregion ist durch Kreise mit einem Kreuz dargestellt. Der X-Punkt der Rekonnexion befindet sich im Ursprung des Koordinatensystems, von dem das Plasma aus entlang der  $z$ -Richtung beschleunigt wird. Im Falle von Petschek-Rekonnexion können Paare von Stoßwellen auftreten (gestrichelte Linien, rot). Die langen Pfeile (grün) stellen Magnetfeldlinien und die kürzeren Pfeile (blau) die Plasmageschwindigkeit dar.

Um große Werte für  $\partial_z v_z$  zu erhalten, ist es notwendig ein notwendiges Kriterium in der Umgebung einer Singularität zu sein, jedoch kein hinreichendes. Der konkrete Wert für  $\partial_z v_z$  bestimmt sich an einer Singularität aus den Grenzwerten von Zähler und Nenner. Die Geschwindigkeit  $v_z$  in Gleichung (6.7) bestimmt eine charakteristische Geschwindigkeit der Wellenausbreitung. Wenn die Strömungsgeschwindigkeit dieser charakteristischen Geschwindigkeit entspricht, können Wellenfronten steiler werden und sich Stoßwellen ausbilden. Für eine homogene Resistivität ergibt sich die magnetosonische Geschwindigkeit als charakteristische Geschwindigkeit.

## 6.2 Zweidimensionale Diffusionsregion

Die vorherige Betrachtung wird auf Stoßwellen in einer zweidimensionalen Diffusionsregion in der  $xz$ -Ebene (siehe Abb. 6.1) ausgeweitet. Daher werden nun alle Abhängigkeiten der physikalischen Größen von  $y$  vernachlässigt. Die stationäre Kontinuitätsgleichung (4.1) vereinfacht sich dann zu

$$v_x \partial_x \rho + \rho \partial_x v_x + v_z \partial_z \rho + \rho \partial_z v_z = 0. \quad (6.8)$$

Werden  $\partial_x p = c_S^2 \partial_x \rho$  und  $\partial_z p = c_S^2 \partial_z \rho$  in der Impulsbilanz (4.2) substituiert, dann ergibt sich

$$\rho v_x \partial_x v_x + \rho v_z \partial_z v_x + c_S^2 \partial_x \rho = B_z \partial_z B_x - B_x \partial_z B_z \quad (6.9)$$

sowie

$$\rho v_x \partial_x v_z + \rho v_z \partial_z v_z + c_S^2 \partial_z \rho = B_x \partial_x B_z - B_x \partial_z B_x. \quad (6.10)$$

Für die  $x$ -Komponente der Induktionsgleichung (4.3) folgt

$$v_x \partial_z B_z + B_z \partial_z v_x - v_z \partial_z B_x - B_x \partial_z v_z = \partial_z \eta \partial_x B_z - \partial_z \eta \partial_z B_x + R_1 \sqrt{\rho}, \quad (6.11)$$

wobei  $R_1 := (\eta \partial_z \partial_x B_z - \eta \partial_z^2 B_x) / \rho^{0.5}$  ist. Um die Berechnungen zu vereinfachen, wird angenommen, dass die Resistivität ausschließlich von  $z$  abhängt. Dann lässt sich die  $z$ -Komponente der Induktionsgleichung (4.3) schreiben als

$$v_z \partial_x B_x + B_x \partial_x v_z - v_x \partial_x B_z - B_z \partial_x v_x = R_2 \sqrt{\rho}, \quad (6.12)$$

mit  $R_2 := (\eta \partial_x \partial_z B_x - \eta \partial_x^2 B_z) / \rho^{0.5}$ .

Analog zu den vorangegangenen quasi-eindimensionalen Betrachtungen werden Ausdrücke für die räumlichen Variationen der MHD-Größen betrachtet. Dabei werden alle partiellen Ableitungen von MHD-Größen (z. B.  $\partial_x v_z$ ,  $\partial_z B_z$ ) als Variablen angesehen. Es wird ein Koordinatensystem mit einer  $x$ -Achse, die senkrecht zu einer möglichen Stoßwelle ist, gewählt. Die Normale von Petscheks langsamen Stoßwellen in Abbildung 6.1 weist einen kleinen Winkel zur  $x$ -Achse auf, sodass das Koordinatensystem  $(x, z)$  gedreht werden muss, bis die  $x$ -Richtung der Stoßwellennormalen entspricht. Dann ist anzunehmen, dass die Variationen der MHD-Größen bezüglich der  $z$ -Richtung klein sind verglichen mit denen in  $x$ -Richtung. Eine Ausnahme stellt der Term  $\partial_x B_x$  dar, welcher ungefähr Null an einer approximativ senkrechten Stoßwelle aufgrund der Divergenzfreiheit des Magnetfeldes ist.

Folglich wird das System von Gleichungen (6.8)–(6.12) bezüglich der größten Beiträge  $\partial_x v_x$ ,  $\partial_x B_z$ ,  $\partial_z B_x$ ,  $\partial_x v_z$  und  $\partial_x \rho$  gelöst. Die Lösung für  $\partial_x B_z$  ist gegeben durch

$$\partial_x B_z = \frac{D}{(\partial_z \eta - v_z) \left( v_x^2 (v_x^2 - c_S^2 - \kappa v_A^2) + \kappa v_{A,x}^2 c_S^2 \right)}, \quad (6.13)$$

mit  $v_A := |\vec{v}_A|$ . Dabei wird der Zähler  $D$  geschrieben als

$$D = f_1 \partial_z v_x + f_2 \partial_z v_z + f_3 \partial_x B_x + f_4 \partial_z B_z + f_5 \partial_z \rho + f_6, \quad (6.14)$$

mit den Koeffizienten aus Tabelle 6.1.

Die Lösung für  $\partial_x v_x$ ,  $\partial_x B_z$ ,  $\partial_z B_x$ ,  $\partial_x v_z$  und  $\partial_x \rho$  ergeben alle denselben Ausdruck für den Nenner. Analog zur Betrachtung der quasi-eindimensionalen Strömung treten große Werte bei Stoßwellen für  $\partial_x B_z$  nur in der Nähe von hebbaren Singularitäten in Gleichung (6.13) auf, weil die Beiträge der Terme des Zählers dort klein sind. Der Nenner gibt eine kritische Strömungsgeschwindigkeit bei der Singularität an:

$$v_x^2 = \frac{1}{2} (c_S^2 + \kappa v_A^2) \pm \sqrt{-\kappa v_{A,x}^2 c_S^2 + \frac{1}{4} (c_S^2 + \kappa v_A^2)^2}. \quad (6.15)$$

Wenn die Bedingung aus Gleichung (6.15) erfüllt ist, können starke Veränderungen in  $x$ -Richtung in allen physikalischen Größen auftreten, was eine notwendige Bedingung für eine Stoßwelle darstellt.

Im Grenzfall eines inkompressiblen Plasmas gilt für die Schallgeschwindigkeit der Grenzfall  $c_S \rightarrow \infty$ . Dann folgt  $(v_x^2 - c_S^2 - \kappa v_A^2) \rightarrow (-c_S^2)$  und die charakteristische Geschwindigkeit aus Gleichung (6.13) ergibt die folgende nicht-triviale Bedingung für eine Singularität:

$$v_x = \pm \tilde{v}_{A,x}. \quad (6.16)$$

Für eine homogene Resistivität ist  $\kappa \rightarrow 1$ . Dann wird die charakteristische Geschwindigkeit zur Alfvén-Geschwindigkeit  $v_{A,x}$ . In einem inhomogenen resistiven Plasma kann eine super-Alfvénische Strömung bezüglich der effektiven Alfvén-Geschwindigkeit  $\tilde{v}_{A,x}$  zu einer Stoßwelle in der Umgebung einer Singularität führen.

$$\begin{aligned}
 f_1 &= v_{A,z} \left( v_{A,x}^2 \Delta v^2 + v_x^2 (v_{A,z}^2 - \Delta v_z v_z) \right) \\
 f_2 &= v_{A,z} c_S^2 v_x \Delta v_z - v_{A,x}^3 \Delta v^2 \\
 &\quad - v_{A,x} (v_{A,z}^2 v_x^2 + \Delta v^2 \Delta v_z v_z) \\
 f_3 &= \frac{(v_x v_z (c_S^2 (\partial_z \eta + v_z) - v_x^2 \Delta v_z))}{\rho^{0.5}} \\
 f_4 &= \frac{(v_x^3 v_A^2 - v_x c_S^2 v_{A,x}^2)}{\rho^{0.5}} \\
 f_5 &= \frac{(c_S^2 \Delta v_z (v_{A,x} \Delta v^2 + v_{A,z} v_x v_z))}{\rho} \\
 f_6 &= R_2 (v_x^3 v_z - \Delta v^2 v_x \partial_z \eta) - R_1 (v_{A,x}^2 \Delta v^2 + v_{A,z}^2 v_x^2)
 \end{aligned}$$

Tabelle 6.1: Koeffizienten aus Gleichung (6.14), wobei die Ausdrücke  $\Delta v^2 := v_x^2 - c_S^2$  und  $\Delta v_z := v_z - \partial_z \eta$  substituiert wurden, um die Darstellung zu vereinfachen (nach Nabert und Glassmeier 2016a).

### 6.3 Auswirkungen einer inhomogenen Resistivitätsverteilung

Für einen ersten Einblick in die hergeleiteten Beziehungen wird die Theorie auf die symmetrische Rekonnexionssituation aus dem Sweet-Parker-Modell angewandt und das Auftreten von Stoßwellen durch eine inhomogene Resistivität untersucht. Dabei betrachtet man eine Diffusionsregion, bei der von beiden Seiten ein Plasma entlang der  $x$ -Richtung, mit einem entgegengesetzt gerichteten Magnetfeld in  $z$ -Richtung, einströmt. Es ergibt sich ein X-Punkt der Rekonnexion, von dem aus eine Beschleunigung des Plasmas entlang der  $z$ -Richtung stattfindet. Es wird untersucht, ob ein abfallender Gradient, wie er bei einer lokal erhöhten Resistivität in der Diffusionsregion auftritt, Stoßwellen hervorrufen kann. Ein solcher abfallender Gradient würde dann in der Rekonnexionsgeometrie auf der rechten Seite in Abbildung 6.1 auftreten. Für diese Situation lässt sich die kritische Geschwindigkeit der Strömung für eine Stoßwelle in der zweidimensionalen Geometrie durch Gleichung (6.16) bestimmen.

Für den Fall einer homogenen Resistivität ( $\partial_z \eta \rightarrow 0$ ) entspricht die kritische Geschwindigkeit der Alfvén-Geschwindigkeit  $v_{A,x}$ . Neben der  $x$ -Achse und hinreichend nahe bei der  $z$ -Achse gilt  $v_x \leq v_{A,x}$  aufgrund des endlichen Magnetfeldes  $B_x$  und der vernachlässigbaren Geschwindigkeitskomponente  $v_z$  (siehe Abb. 6.1). Betrachtet man die Situation weit weg von der  $z$ -Achse, dann würde  $v_x$  der Einströmgeschwindigkeit in die Rekonnexionsregion entsprechen und  $v_{A,x}$  zu Null werden. Allerdings ist die  $x$ -Achse streng genommen nicht orthogonal zu den langsamen Stoßwellen der Petschek-Rekonnexion. Um dies zu berücksichtigen, muss man anstatt  $B_x$  die Normalkomponente des Magnetfeldes bezüglich einer möglichen Stoßwelle verwenden. In Petscheks Modell besitzen die Stoßwellen einen Winkel  $\alpha_{St}$  zur  $z$ -Achse, der durch

$$\tan(\alpha_{St}) = \left| \frac{B_{out}}{B_{in}} \right| \quad (6.17)$$



gegeben ist, wobei  $B_{\text{in}}$  die ungestörte einströmende und  $B_{\text{out}}$  die ausströmende Magnetfeldmagnitude ist (Petschek 1964). Wird dieser Winkel der langsamen Stoßwelle angenommen, dann konvergiert die Einströmgeschwindigkeit gegen die Alfvén-Geschwindigkeit  $v_{A,x}$ . Somit bleibt die Einströmgeschwindigkeit stets unterhalb der kritischen Geschwindigkeit für eine homogene Resistivität bei Petscheks langsamen Stoßwellen. Als Konsequenz können solche Stoßwellen bei homogener Resistivität nicht auftreten.

Ein abfallender Gradient der Resistivität, das bedeutet  $\partial_z \eta < 0$ , führt auf  $\kappa < 1$ . Dann wird die kritische Einströmgeschwindigkeit, bestimmt durch Gleichung (6.16), kleiner. Dadurch ist es möglich, dass die Geschwindigkeit des einströmenden Plasmas die effektive Alfvén-Geschwindigkeit übertrifft. Durch die Abbremsung zur  $z$ -Achse hin gibt es dann einen Punkt, an dem die Bedingung in Gleichung (6.16) erfüllt ist und eine Stoßwelle entstehen kann. Somit können bei einem Gradienten der Resistivität, im Gegensatz zur Situation mit einer homogenen Resistivität, die langsamen Stoßwellen der Petschek-Rekonnexion auftreten.

Gradienten in der Resistivität können Stoßwellen hervorrufen, welche die Plasmaströmung stark modifizieren. Dabei muss noch genauer untersucht werden, ob diese Stoßwellen bei der Erde oder dem Merkur auftreten. Weiterhin stellen die Stoßwellen nur eine mögliche Modifikation des Plasmas durch eine inhomogene Resistivität dar. Stoßwellen haben eine enge Beziehung zur Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen. Das lässt sich beispielsweise an einem Vergleich von Gleichung (6.15) mit der Dispersionsrelation für die langsame und schnelle magnetosonische Welle aus Gleichung (1.48) erkennen. Beide Gleichungen besitzen dieselbe Struktur und die effektive Alfvén-Geschwindigkeit kann auch als eine Ausbreitungsgeschwindigkeit für Wellen betrachtet werden. Durch einen Gradienten in der Resistivität wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen modifiziert. Werden solche Effekte in Raumfahrzeugdaten entdeckt, lassen sich Rückschlüsse auf die Inhomogenität der Resistivitäts- beziehungsweise Leitfähigkeitsverteilung ziehen.



## 7 Schätzung planetarer Magnetfeldparameter mit einem Reihenentwicklungsmodell<sup>1</sup>

In Kapitel 3.4 wurde das planetare Magnetfeld der Erde mit THEMIS-Daten aus der Magnetosheath geschätzt. Dabei wurde die Wechselwirkung zwischen dem planetaren Magnetfeld und dem Sonnenwind durch eine MHD-Simulation berechnet. Allerdings zeigen Lösungen des Reihenentwicklungsmodells nullter Ordnung eine bessere Übereinstimmung mit Beobachtungen nahe der Stagnationslinie als die Ergebnisse des MHD-Simulationscodes (vergleiche Kap. 4.6). Dabei war es in den MHD-Simulationen auch nicht möglich, einen Wert der Resistivität, wie er aus Raumfahrzeugbeobachtungen in Kapitel 5.5 bestimmt wurde, zu verwenden. Daher wird in diesem Kapitel eine erneute Schätzung des Dipolmoments der Erde mit dem Reihenentwicklungsmodell nullter Ordnung durchgeführt.

Mit dem Reihenentwicklungsmodell lassen sich die Fehler in der Schätzung planetarer Magnetfeldparameter detaillierter betrachten und verbesserte Schätzverfahren konstruieren. Zunächst wird ein Verfahren vorgestellt, bei dem das planetare Dipolmoment aus einer beobachteten Bugstoßwellenposition zusammen mit den gemessenen Sonnenwindbedingungen vor der Stoßwelle geschätzt wird. Ein solches Vorgehen eignet sich daher auch für Raumfahrtmissionen, die nur ein Raumfahrzeug besitzen. Weiterhin wird das Verfahren zur Schätzung der planetaren Magnetfeldparameter aus Magnetosheathdaten über den MHD-Simulationscode aus Kapitel 3 auf die Reihenentwicklungsmethode übertragen, welches sich insbesondere für die BepiColombo-Mission eignet. Aufgrund der geringen Laufzeit zur Berechnung der Wechselwirkung mit dem Reihenentwicklungsmodell nullter Ordnung im Vergleich zur MHD-Simulation ist es möglich, auch größerer Datenmengen zur Parameterschätzung zu nutzen. Damit lässt sich der Vorteil der BepiColombo-Mission mit seinen zwei Raumfahrzeugen im Vergleich zur MESSENGER-Mission für die Schätzung des planetaren Magnetfeldes von Merkur zeigen. Es lassen sich bei korrekter Berücksichtigung aller Daten aus der Wechselwirkungsregion statistische und systematische Fehler stark reduzieren.

---

<sup>1</sup>Die Ausführungen dieses Kapitels sind bei Nabert et al. (2016a) entnommen.

## 7.1 Abhängigkeit der Magnetosheathgeometrie vom Dipolmoment

Die Wechselwirkung des Sonnenwinds mit dem Dipolfeld der Erde bestimmt die Geometrie des Umströmungsgebietes. Diese ist in einem Reihenentwicklungsmodell durch die Abstände und Krümmungsparameter der Bugstoßwelle und der Magnetopause bestimmt. Dabei hängen die Geometrieparameter sowohl von den Sonnenwindbedingungen als auch vom planetaren Magnetfeld ab. Mithilfe der analytischen Approximation der Lösung des Reihenentwicklungsmodells nullter Ordnung kann die Abhängigkeit der Geometrieparameter vom Dipolmoment untersucht werden.

Der Magnetopausenabstand lässt sich nach Gleichung (4.103) ausdrücken über

$$\Delta x_{\text{MP}} = a_{\text{MP}} M^{\frac{1}{3}}, \quad (7.1)$$

wobei  $a_{\text{MP}}$  die Abhängigkeit des Magnetopausenabstands von den Sonnenwindbedingungen enthält und definiert ist durch

$$a_{\text{MP}} := \left( \frac{f^2}{2\mu_0 k_{\text{P}} \rho_{\text{SW}} v_{\text{SW}}^2} \right)^{\frac{1}{6}}. \quad (7.2)$$

Die Dicke der Magnetosheath in Gleichung (4.112) besitzt dieselbe Abhängigkeit vom Dipolmoment wie der Magnetopausenabstand, was ausgedrückt werden kann durch

$$x_{\text{MS}} = a_{\text{MS}} a_{\text{MP}} M^{\frac{1}{3}}, \quad (7.3)$$

mit dem sonnenwindabhängigen Vorfaktor

$$a_{\text{MS}} := \frac{1}{(0.8 + m_{\text{BS}})(g_{\text{v}} - 1) - 1}. \quad (7.4)$$

Der subsolare Bugstoßwellenabstand  $\Delta x_{\text{BS}}$ , die Summe des Magnetopausenabstands und der Magnetosheathdicke, ist dann

$$\Delta x_{\text{BS}} = (1 + a_{\text{MS}}) a_{\text{MP}} M^{\frac{1}{3}}. \quad (7.5)$$

Die geometrischen Abstände entlang der Staupunktstromlinie, das heißt der Bugstoßwellenabstand  $\Delta x_{\text{BS}}$ , die Dicke der Magnetosheath  $x_{\text{MS}}$  und der Magnetopausenabstand  $\Delta x_{\text{MP}}$ , sind alle proportional zu  $M^{1/3}$ . Die Krümmungsparameter der Bugstoßwelle  $c_{\text{BS},y}$ ,  $c_{\text{BS},z}$  und der Magnetopause  $c_{\text{MP},y}$ ,  $c_{\text{MP},z}$  haben in der analytischen Näherung eine inverse Abhängigkeit vom Bugstoßwellen- beziehungsweise Magnetopausenabstand. Damit sind die Krümmungsparameter proportional zu  $M^{-1/3}$ .

Über die Minimierung der Kostenfunktion wurden in Kapitel 3.4 die Ergebnisse der MHD-Simulation an Daten angepasst. Dabei trägt über Magnetfeldvariationen an der Magnetopause auch ihre Lage zur Kostenfunktion bei. In Kapitel 4.6 wurde ein Versatz im subsolaren Magnetopausenabstand zwischen der MHD-Simulation und dem Reihenentwicklungsmodell nullter Ordnung beziehungsweise dem Magnetopausenmodell von Shue et al. (1998) von etwa  $0.6 R_{\text{E}}$  festgestellt. Dieser Unterschied war auf die, für eine stabile Simulation nötigen, endlichen Diffusionsparameter zurückzuführen. Mithilfe

der zuvor angestellten Geometriebetrachtungen lassen sich die Auswirkungen des daraus resultierenden Fehlers auf die Schätzung des planetaren Magnetfeldes mit dem MHD-Simulationscode abschätzen. Über Gleichung (7.1) kann der Fehler in der Schätzung des Dipolmoments aus dem Versatz der Magnetopausenabstände zwischen MHD-Simulation und Reihenentwicklungsmodell für typische Sonnenwindbedingungen abgeschätzt werden. Es ergibt sich ein Fehler im Dipolmoment von etwa 20%. Durch die Verwendung eines Reihenentwicklungsmodells lässt sich dieser systematische Fehler vermeiden, wobei berücksichtigt werden muss, dass andere Fehler, insbesondere bei der Verwendung einer niedrigen Ordnung des Reihenentwicklungsmodells, auftreten können.

## 7.2 Methoden zur Schätzung des Dipolmoments

Die Qualität der Schätzung planetarer Magnetfeldparameter ist, abgesehen von Modellfehlern, im Wesentlichen von der Qualität der verfügbaren Sonnenwindbeobachtungen abhängig. Bei Missionen, die nur aus einem Raumfahrzeug bestehen, sind während der Durchquerung der Wechselwirkungsregion keine Sonnenwinddaten von der Mission verfügbar. Lediglich an der äußeren Grenze, beim Bugstoßwellendurchgang, können die Sonnenwindbedingungen oftmals aus den Raumfahrzeugdaten vor der Stoßwelle bestimmt werden. In der idealen MHD-Beschreibung der Wechselwirkung erreicht der ungestörte Sonnenwind die Bugstoßwelle. Ist diese Näherung zutreffend, dann lässt sich der Bugstoßwellenabstand zusammen mit den zugehörigen Sonnenwindbedingungen aus den Daten bestimmen. Aus der Lage der Bugstoßwelle und den Sonnenwindinformationen können die planetaren Magnetfeldparameter geschätzt werden.

Diese Möglichkeit der Schätzung lässt sich anhand der analytischen Lösung für den Bugstoßwellenabstand aus Gleichung (7.5) verdeutlichen. Dazu werden die Vorfaktoren  $a_{MP}$  und  $a_{MS}$  mit den Sonnenwindbedingungen vor der Stoßwelle sowie der Bugstoßwellenabstand aus den Daten abgeschätzt. Für eine Parameterschätzung des Dipolmoments  $M$  bei der Erde können Daten von Bugstoßwellendurchgängen des THC-Raumfahrzeugs der THEMIS-Mission in GSM-Koordinaten genutzt werden. Die Daten müssen in das Koordinatensystem des Modells transformiert werden. Mit einer Rotation des GSM-Koordinatensystems um die  $z$ -Achse und anschließend um die  $y$ -Achse wird die  $x$ -Achse in Sonnenwindrichtung gedreht. Weiterhin wird der Ursprung vom Zentrum der Erde zur Bugstoßwelle über  $x \rightarrow \Delta x_{BS} + x$  transformiert. Die  $z$ -Richtung ist dann jedoch nicht notwendigerweise entlang der Richtung des Dipolmoments, wie es in der analytischen Lösung angenommen wurde. Nimmt man einen Sonnenwind in der  $xy$ -Ebene der GSM-Koordinaten an, dann kann die Stärke des Dipolmoments der Erde nach Gleichung (1.18) im Bereich seiner  $z$ -Komponente und seiner Magnitude in GEO-Koordinaten schwanken. Für das IGRF (International Geomagnetic Reference Field) von 2010 ergibt sich ein Schwankungsbereich zwischen etwa  $-0.959 m_{\text{norm}} \leq M \leq -0.945 m_{\text{norm}}$ .

In diesen Koordinaten befindet sich die Bugstoßwellenposition bei  $x_{SC/BS}$  in  $x$ -Richtung, bei  $y_{SC/BS}$  in  $y$ -Richtung und bei  $z_{SC/BS}$  in  $z$ -Richtung. Für die Angabe von  $x_{SC/BS}$  muss jedoch bereits die subsolare Bugstoßwellenposition bekannt sein, sodass anstatt dessen der beobachtete Bugstoßwellenabstand in  $x$ -Richtung, gemessen vom Zentrum der Erde,  $\Delta x_{SC/BS}$  angegeben wird. Für Beobachtungen neben der Stagnationslinie muss die Geometrie der Bugstoßwelle betrachtet werden, um auf den subsolaren Bugstoßwellen-

abstand in Gleichung (7.5) zu schließen. In einer Umgebung der Stagnationslinie ist dafür die Parametrisierung der Bugstoßwelle nach Gleichung (4.21) geeignet. Mit den analytischen Näherungen der Krümmungsparameter  $c_{BS,y}$  und  $c_{BS,z}$  nach Gleichung (4.105) beziehungsweise Gleichung (4.109) ergibt sich in den kartesischen Koordinaten des Reihenentwicklungsmodells für die Parametrisierung der Bugstoßwelle

$$x = \frac{2}{5 \Delta x_{BS}} y^2 + \frac{1}{2 \Delta x_{BS}} z^2. \quad (7.6)$$

Berücksichtigt man, dass sich der Ursprung des Koordinatensystems des Modells am subsolaren Punkt der Bugstoßwelle befindet, ergibt sich unter Verwendung der beobachteten Bugstoßwellenposition bei  $\Delta x_{SC/BS}, y_{SC/BS}, z_{SC/BS}$  mit Gleichung (7.6)

$$\Delta x_{BS} = \frac{\Delta x_{SC/BS}}{2} + \sqrt{\frac{\Delta x_{SC/BS}^2}{4} + \frac{2 y_{SC/BS}^2}{5} + \frac{z_{SC/BS}^2}{2}} \quad (7.7)$$

für den subsolaren Bugstoßwellenabstand zur Erde.

Die Sonnenwindbedingungen bei der Bugstoßwelle werden durch Mittelwerte über 5 Minuten aus den THC-Daten vor der Stoßwelle gewonnen. Allerdings ist die MHD-Beschreibung nur näherungsweise gültig und es kann schon vor der Stoßwelle zur Beeinflussung des Sonnenwindplasmas durch die Wechselwirkung kommen. Deshalb werden die Mittelwerte in einem zeitlichen Abstand des Satelliten von 10 Minuten zur Bugstoßwelle bestimmt. Dabei entsprechen 10 Minuten einem räumlichen Abstand von etwa 600 km, was in der Größenordnung einiger Protonen-Gyroradien für die Wechselwirkung liegt (siehe Kap. 1.5). Die auf diese Weise bestimmten Sonnenwindbedingungen stellen einen Kompromiss aus möglichst ungestörten, aber aktuellen Sonnenwindbedingungen beim Bugstoßwellendurchgang dar.

Weil die Temperatur als ein Moment zweiter Ordnung der Geschwindigkeitsverteilung nur schwierig aus Daten genau zu bestimmen ist, wird der Sonnenwind als kaltes Plasma genähert, also der Grenzfall eines verschwindenden Sonnenwindgasdrucks betrachtet. Weiterhin wird eine  $y$ -Komponente des Sonnenwindmagnetfeldes berücksichtigt, indem die  $z$ -Komponente  $B_z$  ersetzt wird durch die Amplitude des tangentialen Magnetfeldes, also  $B_z \leftarrow \text{sgn}(B_z) (B_y^2 + B_z^2)^{0.5}$ , wie in Kapitel 4.3 für das reduzierte MHD-Modell beschrieben.

Es wurden 11 Bugstoßwellendurchgänge nahe des subsolaren Punktes auf 8 Umlaufbahnen vom Raumfahrzeug THC im Zeitraum vom 24. August 2008 bis zum 6. September 2009 beobachtet. Alle Daten sind in Tabelle 7.1 zusammengetragen. Aufgrund von Variationen des Sonnenwindes am 2. September 2009, am 4. September 2009 und am 6. September 2009 sind jeweils zwei Bugstoßwellendurchgänge aufgeführt. Mit den Daten wurden die zugehörigen Dipolmomente bestimmt. Für jede einzelne Schätzung ergab sich ein relativer Fehler  $\Delta M$  von maximal 19% bezüglich des wahren Wertes für das Dipolmoment der Erde. Der Mittelwert für das geschätzte Dipolmoment von den 8 Umlaufbahnen ist  $M = -0.98 m_{\text{norm}} = -7.9 \cdot 10^{15} \text{ T m}^3$  mit einer Standardabweichung von  $0.1 m_{\text{norm}} = 0.8 \cdot 10^{15} \text{ T m}^3$ . Der Fehler im Mittelwert weicht um weniger als 4% vom Wert der  $z$ -Komponente beziehungsweise um weniger als 2% von der Magnitude ab.

Im betrachteten Zeitraum befindet sich der THC-Satellit, bis auf die Bugstoßwellendurchgänge vom 24. August 2008 und vom 25. August 2008, näher als  $5 R_E$  an der

Datum dd.m.	Zeit UT	$N_{\text{SW}}$ 1/cm <sup>3</sup>	$v_{\text{SW}}$ km/s	$B_{z,\text{SW}}$ nT	$B_{t,\text{SW}}$ nT	$\Delta x_{\text{SC/BS}}$ $R_E$	$y_{\text{SC/BS}}$ $R_E$	$z_{\text{SC/BS}}$ $R_E$	$M/m_{\text{norm}}$
24.8.	00:29	7.61	310.4	1.11	1.74	12.59	-5.52	-2.27	-0.93
25.8.	22:41	6.81	267.8	0.89	1.72	13.64	-4.82	-2.41	-0.90
27.8.	22:20	8.04	272.6	-1.41	3.58	13.41	-4.43	-2.10	-0.86
29.8.	21:06	6.92	324.1	-2.93	3.99	14.37	-3.56	-2.62	-1.12
31.8.	21:49	6.98	334.3	-2.47	2.60	13.63	-3.73	-2.02	-1.05
02.9. (a)	19:48	6.96	250.1	-1.94	1.98	15.22	-2.40	-1.74	-1.02
02.9. (b)	20:58	7.43	276.7	0.93	2.32	14.17	-2.81	-2.57	-0.98
04.9. (a)	21:02	2.05	571.5	1.55	4.10	14.06	-2.33	-1.68	-0.93
04.9. (b)	21:23	2.05	562.1	1.50	4.26	13.76	-2.46	-1.62	-0.85
06.9. (a)	21:26	4.02	546.9	-3.05	3.78	13.50	-2.20	-1.45	-1.17
06.9. (b)	22:30	3.93	560.1	2.92	3.15	12.47	-2.46	-1.49	-0.96

Tabelle 7.1: Vom THC-Satelliten beobachtete Bugstoßwellendurchgänge nahe des subsolaren Punktes mit Sonnenwindbedingungen, die aus Beobachtungen vor der Bugstoßwelle gewonnen wurden (nach Nabert et al. 2016a). Dabei gibt  $B_{z,\text{SW}}$  die  $z$ -Komponente des Sonnenwindes und  $B_{t,\text{SW}} = (B_{y,\text{SW}}^2 + B_{z,\text{SW}}^2)^{0.5}$  die Magnetfeldamplitude in der  $yz$ -Ebene an.

Stagnationslinie. Die Korrekturen im Bugstoßwellenabstand sind nach Gleichung (7.7) für solche Entfernungen unter  $5 R_E$  kleiner als  $1 R_E$ . Ein möglicher Modellfehler für den subsolaren Bugstoßwellenabstand müsste wesentlich kleiner als diese Korrektur sein und kann mit  $< 0.2 R_E$  abgeschätzt werden. Die  $z$ -Komponente des Dipolmoments ist stets größer als  $-3.1$  nT. Durch die Annahme der idealen MHD ergibt sich ein Fehler im Vergleich zu dem Modell von Shue et al. (1998) aus Abbildung 5.6 im Magnetopausen- beziehungsweise Bugstoßwellenabstand von weniger als  $0.2 R_E$ . Ein weiterer Modellfehler kann durch die verwendete nullte Ordnung des Reihenentwicklungsmodells entstehen. Vergleicht man analytische Lösungen des Modells nullten Ordnung mit den Lösungen des Modells zweiten Ordnung, wie beispielsweise in Abbildung 4.7, lässt sich ein Fehler im Abstand von etwa  $< 0.2 R_E$  bestimmen. Fehler im Bugstoßwellenabstand von  $0.2 R_E$  führen nach Gleichung (7.5) für typische Sonnenwindbedingungen zu einem möglichen Modellfehler von weniger als 6% bei der Schätzung des Dipolmoments. Es können sich auch Datenfehler oder Fehler bei der Schätzung des Dipolmoments durch eine Bewegung der Bugstoßwelle aufgrund sich ändernder Sonnenwindbedingungen ergeben, da das hier verwendete Modell als stationär angenommen wurde. Zum Abschätzen solcher Fehler betrachtet man eine typische Bugstoßwellenposition bei der Erde von etwa  $13 R_E$  und nimmt an, dass die Bugstoßwellenposition aufgrund einer Bewegung um etwa  $0.3 R_E$  falsch bestimmt wurde. Es ergibt sich ein relativer Fehler in der Bestimmung des Dipolmoments von etwa 10% nach Gleichung (7.5). Ausgehend von typischen Sonnenwindbedingungen entspricht eine Variation der Bugstoßwelle um  $0.3 R_E$  einer Änderung der Sonnenwinddichte um etwa 20%. Eine nicht berücksichtigte Variation der Sonnenwindgeschwindigkeit um 20% würde einen Fehler von 20% in der Bestimmung des Dipolmoments hervorrufen. Die Fehler aufgrund von Sonnenwindänderungen sind im Wesentlichen statistische Fehler, sodass sich diese bei der Verwendung vieler Daten nicht im Mittelwert niederschlagen. Die hier abgeschätzten Fehler sind zum einen konsistent mit den einzelnen Schätzungen von  $M$  aus Tabelle 7.1, zum anderen liegt der Mittelwert wie erwartet dichter am wahren Wert des Dipolmoments als einige der einzelnen Schätzer.

Sind die Sonnenwindbedingungen während eines Magnetosheathdurchgangs des THC-Raumfahrzeugs bekannt, lässt sich das Dipolmoment nicht nur durch die Bugstoßwellenposition bestimmen. Jeder Punkt innerhalb der Magnetosheath kann verwendet werden, um über ein Reihenentwicklungsmodell das Dipolmoment  $M$  zu schätzen. Während des Durchgangs des THC-Raumfahrzeugs durch die Magnetosheath entlang des Orbits  $x_{SC,m}, y_{SC,m}, z_{SC,m}$ , klassifiziert mit den Positionsindex  $m$ , misst das Raumfahrzeug die Massendichte  $\rho_{SC,m}$ , die  $x$ -Komponente der Geschwindigkeit  $v_{SC,m}$ , die  $z$ -Komponente des Magnetfeldes  $B_{SC,m}$  und den Druck  $p_{SC,m}$  in GSM-Koordinaten. Gleichzeitig lassen sich aus dem OMNI-Datensatz die Sonnenwindbedingungen am subsolaren Punkt für die Dichte  $\rho_{SW,m}$ , die Geschwindigkeit  $v_{SW,m}$ , die  $z$ -Komponente des Magnetfeldes  $B_{SW,m}$  und den Druck  $p_{SW,m}$  während des Orbits von THC gewinnen.

Es wird eine Koordinatentransformation durchgeführt, um die GSM-Koordinaten der Raumfahrzeugdaten an das Koordinatensystem des Reihenentwicklungsmodells nullter Ordnung anzupassen. Da die physikalischen Größen bei Verwendung der nullten Ordnung des Reihenentwicklungsmodells durch  $\rho(x, y, z) = \rho_0(\tilde{x})$ ,  $v_x(x, y, z) = v_{x0}(\tilde{x})$ ,  $p(x, y, z) = p_0(\tilde{x})$  und  $B_z(x, y, z) = B_{z0}(\tilde{x})$  gegeben sind, lässt sich jeder Punkt  $(x, y, z)$  auf einen Punkt  $\tilde{x}$  auf der Stagnationslinie zurückführen. Dazu wird die Geometrie der Magnetosheath über die Reihenentwicklung zweiter Ordnung nach Gleichung (4.23) beschrieben. Für die Krümmungen der Bugstoßwelle und der Magnetopause werden die analytischen Abschätzungen aus den Gleichungen (4.105), (4.109), (4.104) und (4.108) verwendet. Über Gleichung (4.23) ergibt sich die Transformation der Raumfahrzeugposition in GSM-Koordinaten  $x_{SC}, y_{SC}, z_{SC}$  durch

$$x_{SC} = \tilde{x}_{SC} + \left( c_{BS,y} + \Delta c_y \frac{\tilde{x}_{SC}}{x_{MS}} \right) y_{SC}^2 + \left( c_{BS,z} + \Delta c_z \frac{\tilde{x}_{SC}}{x_{MS}} \right) z_{SC}^2. \quad (7.8)$$

Die Raumfahrzeugbeobachtungen bei der transformierten Raumfahrzeugpositionen  $\tilde{x}_{SC,m}$  von der Massendichte  $\rho_0(\tilde{x}_{SC,m}) = \rho_{0,m}$ , der Geschwindigkeit  $v_{x0}(\tilde{x}_{SC,m}) = v_{x0,m}$ , dem Magnetfeld  $B_{z0}(\tilde{x}_{SC,m}) = B_{z0,m}$  und dem Druck  $p_0(\tilde{x}_{SC,m}) = p_{0,m}$  lassen sich mit der Lösung des Modells nullter Ordnung an Positionen  $\tilde{x} = \tilde{x}_{SC,m}$  vergleichen. Der Berechnungsalgorithmus für die Lösung ist in Kapitel 4.3 dargestellt.

Zur Bestimmung der Abweichungen zwischen Daten und Modelllösung wird folgende Kostenfunktion verwendet:

$$K = \sum_{m=1}^{M_{\text{data}}} \left( \frac{\rho_{0,m} - \rho_{SC,m}}{\rho_{SC,m}} \right)^2 + \left( \frac{v_{x0,m} - v_{SC,m}}{v_{SC,m}} \right)^2 + \left( \frac{B_{z0,m} - B_{SC,m}}{B_{SC,m}} \right)^2. \quad (7.9)$$

Der Gasdruck findet in der Kostenfunktion (7.9) keine Berücksichtigung, weil dieser als ein Moment zweiter Ordnung der Geschwindigkeitsverteilung nur schwierig aus Daten genau zu bestimmen ist. Weiterhin wird auch hier der Sonnenwind als kaltes Plasma genähert, also der Grenzfall eines verschwindenden Sonnenwindgasdrucks betrachtet.

Die Berechnung der Kostenfunktion erfolgt auf einem Gitter bezüglich  $M$  in einem Bereich von  $-1.5 m_{\text{norm}} \leq M \leq -0.8 m_{\text{norm}}$ . Dabei wird der Gitterabstand zwischen zwei Werten von  $M$  mit  $0.0005 m_{\text{norm}}$  gewählt. Für die zuvor untersuchten 8 Orbits werden die zugehörigen Daten der 8 Magnetosheathdurchgänge genutzt, um aus den Daten jedes Durchgangs einen Wert für das Dipolmoment  $M$  zu schätzen. Dabei finden die zeitabhängigen OMNI-Sonnenwinddaten in der Berechnung der Wechselwirkung zwischen dem



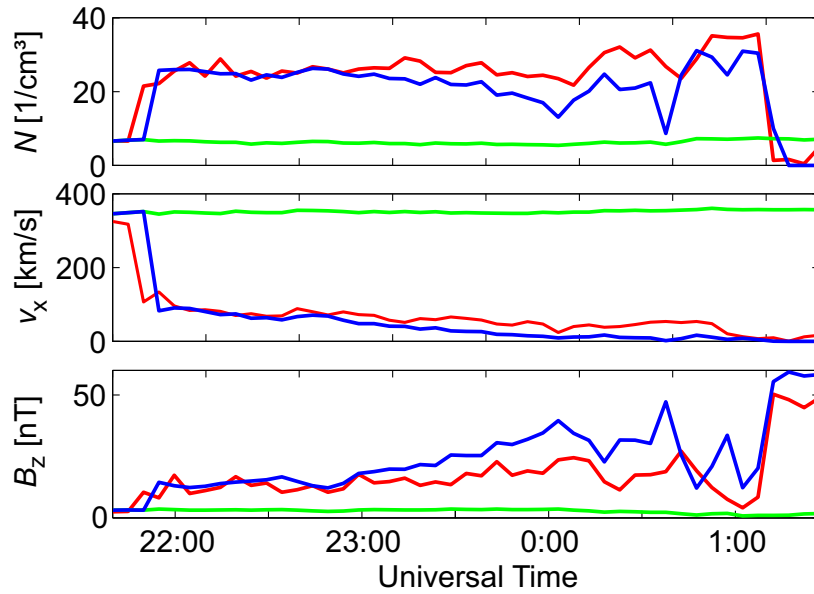


Abbildung 7.1: Vergleich zwischen THC-Daten aus der Magnetosheath vom 31. August 2008 (rot) mit der über das Dipolmoment  $M$  angepassten Modelllösung (blau) unter Verwendung der zeitabhängigen OMNI-Sonnenwinddaten (grün) in den Koordinaten des Modells.

Sonnenwind und dem Planeten Verwendung. Die verwendeten THC-Daten der Magnetosheathdurchgänge und die OMNI-Daten besitzen eine Zeitauflösung von 5 Minuten, was nach Kapitel 4.5 in etwa der Transitzeit des Sonnenwinds durch die subsolare Magnetosheath entspricht. Exemplarisch sind die Magnetosheathdaten vom 31. August 2008 zusammen mit den verwendeten OMNI-Sonnenwinddaten in Abbildung 7.1 zu sehen. Weiterhin ist die zugehörige Lösung des reduzierten MHD-Modells für die minimierte Kostenfunktion (7.9) bei Verwendung des dadurch bestimmten Dipolmoments  $M$  dargestellt. Die geschätzten Dipolmomente aller 8 Magnetosheathdurchgänge sind in Abbildung 7.2 dargestellt. Jeder einzelne geschätzte Wert für das Dipolmoment  $M$  weicht höchstens 13% von dem Dipolmoment der Erde ab. Aus den 8 Schätzern folgt ein Mittelwert für das Dipolmoment von  $M = -0.98 m_{\text{norm}} = -7.9 \cdot 10^{15} \text{ T m}^3$  mit einer Standardabweichung von  $0.05 m_{\text{norm}} = 0.4 \cdot 10^{15} \text{ T m}^3$ . Damit ist der Fehler bezüglich des wahren Wertes kleiner als 4% für den Wert der  $z$ -Komponente beziehungsweise kleiner als 2% für die Magnitude.

Der Wert für das Dipolmoment ist ähnlich gut wie zuvor über die Schätzung mit der Bugstoßwellenposition, jedoch ist die Standardabweichung nur noch halb so groß. Die Schätzungen beider Methoden sind nicht korreliert; der Korrelationskoeffizient ist 0.13. Deshalb sind unterschiedliche Fehlerquellen für beide Modelle anzunehmen. Beispielsweise werden die Sonnenwinddaten bei der Schätzung über die Bugstoßwellenposition am subsolaren Punkt bestimmt und müssen nicht erst über ein Modell im OMNI-Datensatz geschätzt werden. Andererseits werden bei der Schätzung mit den Magnetosheathdaten deutlich mehr gemessene Informationen verarbeitet, sodass sich gewisse Fehler besser aufheben können.

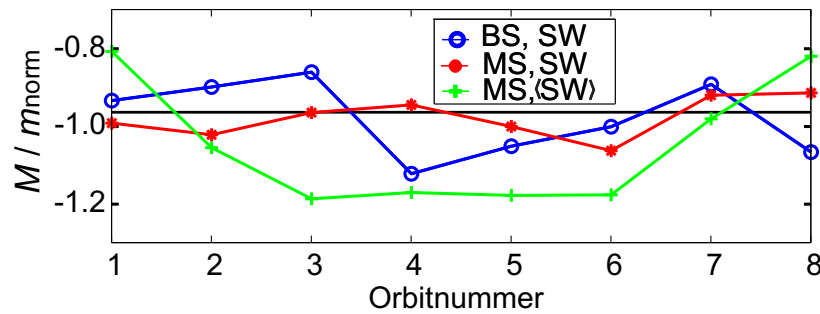


Abbildung 7.2: Aus THC-Daten der Orbits vom 24.8, 25.8, 27.8, 29.8, 31.8, 2.9, 4.9 und 6.9, mit Orbitnummern 1 bis 8 bezeichnet, geschätzte Dipolmomente (nach Nabert et al. 2016a). Dabei wurde das Dipolmoment über die Position der Bugstoßwelle mit Sonnenwindbedingungen vor der Stoßwelle (blau), über THC-Magnetosheathdaten mit aktuellen OMNI-Sonnenwinddaten (rot) und über THC-Magnetosheathdaten mit mittleren Sonnenwinddaten (grün) berechnet. In schwarz ist die  $z$ -Komponente des Dipolmoments der Erde eingezeichnet.

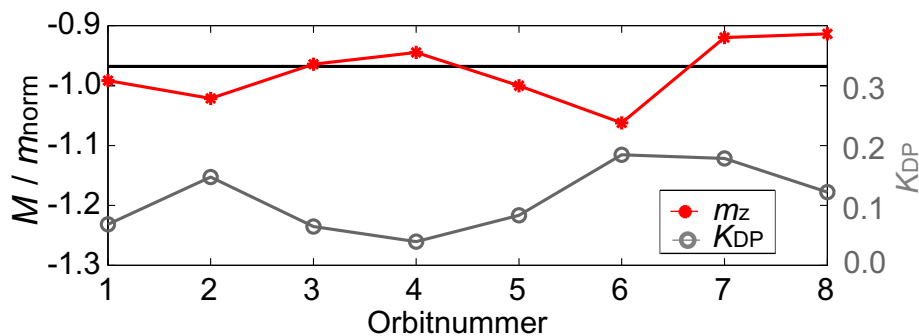


Abbildung 7.3: Mit der Kostenfunktion (7.9) aus THC-Magnetosheathdaten geschätzte Dipolmomente (rot) zusammen mit dem Wert der Kostenfunktion am Minimum normiert auf die Anzahl der Datenpunkte des jeweiligen Magnetosheathdurchgangs (nach Nabert et al. 2016a).

In Abbildung 7.3 sind die geschätzten Dipolmomente zusammen mit dem Wert der Kostenfunktion, normiert auf die Anzahl der Datenpunkte,  $K_{DP} := K/M_{data}$  dargestellt. Der Wert für  $K_{DP}$  liegt zwischen 0.04 und 0.2 und gibt die mittlere Abweichung von Daten und Modelllösung an. Es verbleibt, wie schon bei der Parameterschätzung mit dem MHD-Simulationscode aus Kapitel 3, ein endlicher Wert der Kostenfunktion im Minimum. Kleinere Werte für die normierte Kostenfunktion zeigen, dass die Modelllösung diesen Datensatz besser beschreiben kann. Kleine Werte unterhalb von 0.1 finden sich bei Orbitnummer 1, 3, 4 und 5, wobei die zugehörigen Schätzer nahe am wahren Wertes liegen. Folglich kann es hilfreich sein, bei der Schätzung der planetaren Magnetfeldmomente die Daten stärker zu berücksichtigen, die eine gute Anpassung zwischen Daten und Modellergebnissen ermöglichen, also einen kleinen Wert der Kostenfunktion haben.

Um die in diesem Kapitel vorgestellten Methoden zur Bestimmung des Dipolmoments

besser vergleichen zu können, wird die Schätzung mit Magnetosheathdaten über die Minimierung der Kostenfunktion (7.9) derart modifiziert, dass die Bugstoßwellenposition angepasst wird. Dazu wird folgende Kostenfunktion verwendet:

$$K = (\Delta x_{BS} - \Delta x_{BS,M})^2, \quad (7.10)$$

wobei  $\Delta x_{BS,M}$  den subsolaren Bugstoßwellenabstand der Modelllösung für ein bestimmtes Dipolmoment  $M$  und  $\Delta x_{BS}$  den aus Messungen über Gleichung (7.7) bestimmten subsolaren Bugstoßwellenabstand bezeichnet. Durch die Bestimmung des Minimums dieser Kostenfunktion wird dann das planetare Dipolmoment  $M$  geschätzt. Dabei wird, im Gegensatz zur Bestimmung des Dipolmoments mit Gleichung (7.5), keine analytische Näherungslösung verwendet. Weiterhin werden die OMNI-Sonnenwinddaten verwendet, anstatt die Sonnenwindbedingungen aus THC-Daten vor der Bugstoßwelle zu schätzen. Dabei wird ein Mittelwert der OMNI-Daten von 10 Minuten um den Bugstoßwelldurchgang genutzt, um die Sonnenwindbedingungen zu bestimmen. Dipolmomente für alle in Tabelle 7.1 aufgeführten 11 Bugstoßwelldurchgänge wurden berechnet, wobei die Werte von mehreren Bugstoßwelldurchgängen entlang eines Orbits stets zu einem Mittelwert zusammengefasst wurden. Aus den 8 Schätzern des Dipolmoments resultiert ein Mittelwert von  $M = -1.01 m_{\text{norm}} = -8.2 \cdot 10^{15} \text{ T m}^3$  mit einer Standardabweichung von  $0.14 m_{\text{norm}} = 1.2 \cdot 10^{15} \text{ T m}^3$ . Im Vergleich zur Schätzung unter Berücksichtigung der gesamten Magnetosheathdaten durch Kostenfunktion (7.9) ergibt sich ein größerer Fehler. Der statistische Fehler lässt sich daher signifikant reduzieren, wenn die gesamten Magnetosheathdaten anstatt der Bugstoßwelldurchgänge Berücksichtigung finden.

Ohne die genaue Kenntnis von zeitabhängigen Sonnenwindbedingungen können zur Bestimmung der Wechselwirkung lediglich mittlere Sonnenwindbedingungen angenommen werden. Die mittleren Sonnenwindbedingungen aller 8 Magnetosheathdurchgänge sind für die Teilchendichte  $\langle N_{\text{SW}} \rangle = 6.65 / \text{cm}^3$ , die Geschwindigkeit  $\langle v_{\text{SW}} \rangle = 382.2 \text{ km/s}$  und das Magnetfeld  $\langle B_{\text{SW}} \rangle = 2.84 \text{ nT}$ . Werden diese Werte als Sonnenwindbedingungen zu allen Zeitpunkten genutzt, lassen sich für die 8 Magnetosheathdurchgänge erneut Dipolmomente  $M$  schätzen. Die Ergebnisse sind in Abbildung 7.2 gezeigt. Es ergibt sich ein mittleres Dipolmoment der 8 Werte von  $M = -1.05 m_{\text{norm}} = -8.4 \cdot 10^{15} \text{ T m}^3$  mit einer Standardabweichung von  $0.16 m_{\text{norm}} = 1.3 \cdot 10^{15} \text{ T m}^3$ . Das entspricht einem Fehler von etwa 10% zum wahren Wert.

Die Verwendung gemittelter Sonnenwindbedingungen führt zu einem schlechteren Ergebnis als die Verwendung der aktuellen Sonnenwinddaten und das Dipolmoment wird deutlich überschätzt. Auch unter Verwendung großer Datenmengen entspricht der Mittelwert des Dipolmoments bei der Verwendung gemittelter Sonnenwindbedingungen nicht zwangsweise dem gesuchten Dipolmoment. Dies liegt darin begründet, dass die Lösung für die Wechselwirkungsregion nichtlinear von den Sonnenwindbedingungen abhängt. Daher ist es für eine präzise Schätzung der planetaren Magnetfeldparameter aus Daten in einer durch die Wechselwirkung beeinflussten Region notwendig, die Anströmbedingungen zu kennen.

Die Daten vom 24. August 2008 fanden schon in Kapitel 3 Verwendung, um das Dipolmoment mit dem MHD-Simulationscode zu schätzen. Dabei wurde für die  $z$ -Komponente ein Wert von  $m_z = -1.078 m_{\text{norm}} = -8.7 \cdot 10^{15} \text{ T m}^3$  bestimmt. Ein Vergleich mit dem über das Reihenentwicklungsmodell berechneten Wert aus Abbildung 7.3 ergibt

$M = -0.99 m_{\text{norm}} = 8.0 \cdot 10^{15} \text{ T m}^3$ . Somit stimmt die Schätzungen mit dem Reihenentwicklungsmodell für diesen Fall besser mit dem wahren Wert überein. Dies liegt darin begründet, dass bei der Schätzung mithilfe der MHD-Simulation ein systematischer Fehler im Abstand der Magnetosheath zur Erde vorliegt (siehe Kap. 4.6), wodurch das Dipolmoment systematisch überschätzt wird. Dieser Fehler ist auch in der zweiten Schätzung mit der MHD-Simulation vom 28. September 2008 zu erkennen. Die hier gezeigten Untersuchungen zeigen bei der Verwendung des reduzierten MHD Modells statistische Schwankungen, jedoch keinen vergleichbaren systematischen Fehler. Somit lässt sich für Daten nahe der Stagnationslinie eine präzisere Schätzung des planetaren Magnetfeldes mit einem Reihenentwicklungsmodell durchführen. Dabei verringert die Verwendung von Daten vieler Magnetosheathdurchgänge den statistischen Fehler in der Schätzung der planetaren Magnetfeldparameter.

## 8 Rekonstruktion von Sonnenwindbedingungen<sup>1</sup>

Die Schätzung des planetaren Magnetfeldes mit Daten aus der Wechselwirkungsregion und dabei bekannten Sonnenwindbedingungen lieferte die Schätzer mit den kleinsten Fehlern. Dabei ging man in Hinblick auf die BepiColombo-Mission davon aus, dass stets ein Raumfahrzeug im Sonnenwind ist, während sich das andere innerhalb der Wechselwirkungsregion befindet. Allerdings liegt diese Raumfahrzeugkonstellation nicht immer vor. Voraussichtlich befinden sich die beiden Raumfahrzeuge der BepiColombo-Mission die meiste Zeit innerhalb der Wechselwirkungsregion, sodass dann keine Sonnenwinddaten zur Verfügung stehen. Um die Daten während solcher Zeiträume zur Schätzung des planetaren Magnetfeldes nutzen zu können, wird ein Verfahren vorgestellt, das die Sonnenwindbedingungen aus den Daten des einen Raumfahrzeugs innerhalb der Wechselwirkungsregion rekonstruiert. Diese rekonstruierten Sonnenwindbedingungen können dann als Randbedingungen des MHD-Modells verwendet werden, um mit den Daten des anderen Raumfahrzeugs das planetare Magnetfeld zu bestimmen. Dieses Vorgehen ermöglicht die Verwendung von mehr Zeitintervallen zur Schätzung der planetare Magnetfeldparameter, was den statistischen Fehler in der Schätzung verringert.

Weiterhin stehen dann auch die Sonnenwindbedingungen für einen großen Teil der Missionslaufzeit zur Verfügung und lassen sich für weitere Untersuchungen verwenden. Schon bei der Erde wurde versucht, Lücken in den Sonnenwindbeobachtungen mithilfe von Messungen innerhalb der Wechselwirkungsregion zu schließen. Andreasen (1997) nutzte den Einfluss des Sonnenwinds auf die elektrischen Ströme in der Magnetosphäre, welcher anhand von Magnetometerdaten von Bodenstationen gemessen werden kann. Die Indizes der geomagnetischen Aktivität in Abhängigkeit von den Sonnenwindbedingungen hängen von den Veränderungen dieser Ströme ab. Dieser Zusammenhang wurde genutzt, um die mittleren Sonnenwindbedingungen und ihre großskaligen zeitabhängigen Variationen, in der Zeit bevor es Raumfahrzeugbeobachtungen gab, zu schätzen. Dazu wurden zunächst Sonnenwindmessungen durch Raumfahrzeuge über eine Multi-Regressionsmethode in Beziehung zu den Indizes der geomagnetischen Aktivität gesetzt. Anschließend ließen sich die Sonnenwindbedingungen über Magnetometerdaten von Bodenstationen bis zurück in das Jahr 1926 schätzen. Kondrashov et al. (2014) nutzten eine andere Möglichkeit, die Sonnenwindbedingungen mit den geomagnetischen Indizes in Verbindung zu bringen. Dabei verwendeten sie eine singuläre Spektralanalyse (englisch: singular spectrum analysis), um Lücken in den Sonnenwindbeobachtungen im Zeitraum

---

<sup>1</sup>Dieses Kapitel über die Schätzung der Sonnenwindparameter ist mit Ausnahme von Kapitel 8.3 bei Nabert et al. (2015) entnommen. Dabei wurde die Darstellung an diese Arbeit angepasst.

von 1972–2013 zu füllen. Ihre Methode schätzt stündliche mittlere Sonnenwindbedingungen in Zeitintervallen ohne Sonnenwindinformationen ab.

Im Gegensatz zu den vorherigen Methoden nutzte Nagatsuma et al. (2015) zusätzlich Raumfahrzeugbeobachtungen, um Sonnenwindbedingungen zu rekonstruieren. Während eines geomagnetischen Sturmes im Jahr 1989 befand sich die Magnetopause aufgrund des sehr hohen dynamischen Sonnenwinddrucks nahe des geostationären Orbits. Die Lage der Magnetopause konnte über GOES (Geostationary Operational Environmental Satellite) bestimmt werden. Die so bestimmte Lage der Magnetopause ließ sich dann mit den Sonnenwindbedingungen über das Magnetopausenmodell von Shue et al. (1998) in Beziehung setzen. Das Einbeziehen von zeitlich hochaufgelösten Raumfahrzeugdaten erlaubt eine genauere Schätzung der Sonnenwindbedingungen mit einer höheren Zeitauflösung im Vergleich zu den vorherigen Methoden.

Dieser Ansatz wird erweitert, indem nicht nur Beobachtungen der Magnetopausenlage zur Sonnenwindrekonstruktion Verwendung finden, sondern Raumfahrzeugmessungen aus der gesamten Magnetosheath. Die Sonnenwindbedingungen werden dazu in diesem Kapitel über die Sonnenwindparameter des Reihenentwicklungsmodells nullter Ordnung geschätzt. Dabei werden die Sonnenwindparameter als Randbedingungen dieses reduzierten MHD-Modells variiert, bis die Lösung des Modells mit den Daten übereinstimmt. Um diese Anpassung zeiteffizient vorzunehmen, wird ein adjungiertes Modell aus dem Reihenentwicklungsmodell nullter Ordnung hergeleitet. Ein Testen des Rekonstruktionsverfahrens erfolgt dann mit Magnetosheathdaten der THEMIS-Mission (Angelopoulos 2008) bei der Erde. Die rekonstruierten Bedingungen lassen sich dann einerseits mit OMNI-Sonnenwinddaten und andererseits mit den Sonnenwindbeobachtungen eines weiteren THEMIS-Satelliten vergleichen. Weiterhin wird gezeigt, dass mithilfe dieses Verfahrens auch die simultane Schätzung von Sonnenwindbedingungen und dem planetaren Magnetfeld aus THEMIS-Daten von zwei Raumfahrzeugen innerhalb der Magnetosheath möglich ist.

## 8.1 Schätzverfahren für Sonnenwindparameter

Um die Sonnenwindbedingungen für die Erde zu schätzen, wird das Reihenentwicklungsmodell der Erde in nullter Ordnung aus Kapitel 4.1 verwendet. Dabei wird das Modell numerisch mit dem Lösungsalgorithmus aus Kapitel 4.3 gelöst.

Der Satellit durchquert die Magnetosheath entlang des Orbits  $x_{SC,m}, y_{SC,m}, z_{SC,m}$ , parametrisiert mit dem diskreten Positionsindex  $m$ . Allerdings ist die Magnetosheathlösung aufgrund der Reihenentwicklung nullter Ordnung auf die Nähe der Stagnationslinie beschränkt. Daten neben der Stagnationslinie können approximativ für die Schätzung verwendet werden, indem sie nach Gleichung (7.8) auf einen Punkt auf der Stagnationslinie zurückgerechnet werden. Dabei bestimmen die analytischen Abschätzungen durch die Gleichungen (4.104), (4.105), (4.108) und (4.109) die benötigten Krümmungen der Bugstoßwelle und der Magnetopause.

Der Satellit misst unter anderem die Massendichte  $\rho_{SC,m}$  beziehungsweise die Teilchendichte der Ionen  $N_{SC,m}$ , den Druck  $p_{SC,m}$ , die  $x$ -Komponente der Geschwindigkeit  $v_{SC,m}$  und die  $z$ -Komponente des Magnetfeldes  $B_{SC,m}$ . Die Werte der Dichte, der Geschwindigkeit, des Magnetfeldes und des Drucks für ein bestimmtes  $m$  stellen einen Da-

tenpunkt dar. Jeder einzelne Datenpunkt steht aufgrund der Annahme quasi-stationärer Prozesse in Beziehung zu bestimmten Sonnenwindparametern zu einem Zeitpunkt. Die Abfolge von quasi-stationären Zuständen approximiert das dynamische Verhalten in der Magnetosheath. Für die geschätzten Sonnenwindparameter zu einem Zeitpunkt muss die Magnetosheathlösung mit dem gemessenen Datenpunkt zu diesem Zeitpunkt übereinstimmen. Dafür werden, ausgehend von beliebigen Startwerten für die Sonnenwindparameter, diese variiert, bis Lösung und Datenpunkt übereinstimmen. Die Datenassimilierung muss dann für jeden Datenpunkt in der Magnetosheath durchgeführt werden.

Für die Datenassimilierung ist es notwendig, dass die Abweichung zwischen Daten und Modelllösung wie auch in Kapitel 3.1 durch eine Kostenfunktion quantifiziert wird. Anders als für die zuvor betrachtete Anpassung planetarer Parameter fließen hier alle physikalischen Größen in die Berechnung der Kostenfunktion ein. Dies ist nötig, da die Parameter des zeitabhängigen Sonnenwindes zu jedem Zeitpunkt 4 Parameter stellen und daher werden zu jedem Zeitpunkt auch mindestens 4 Vergleichsgrößen benötigt, um eine eindeutige Rekonstruktion der Parameter zu gewährleisten. Daher wird als Kostenfunktion  $K$  die durch Gleichung (7.9) definierte Funktion benutzt.

Die Kostenfunktion  $K$  wird bezüglich der Sonnenwindparameter  $\rho_{\text{SW}}$ ,  $v_{\text{SW}}$ ,  $B_{\text{SW}}$  und  $p_{\text{SW}}$  minimiert. Dabei wird die Schrittweite im Parameterraum proportional zum Wert der Kostenfunktion gewählt. Wenn das hier genutzte Magnetosheathmodell in der Lage ist, die physikalischen Vorgänge vollständig darzustellen und Datenfehler vernachlässigbar sind, dann müsste die Kostenfunktion im globalen Minimum zu Null werden. Bezieht man sowohl die Unzulänglichkeiten des Modells als auch Datenfehler mit ein, verbleibt am globalen Minimum ein endlicher Wert und die zugehörigen Parameter ergeben den bestmöglichen Schätzer der Sonnenwindbedingungen.

Ein gradientenbasiertes Minimierungsverfahren, ähnlich dem aus Abschnitt 3.1, wird verwendet, um das Minimum im Parameterraum zu berechnen. Als initiale Parameter werden typische Sonnenwindbedingungen nach Tabelle 1.1 genutzt. Dabei wird eine Methode des steilsten Abfalls (englisch: steepest descent method) ohne Liniensuche (englisch: line search) genutzt. Wenn der Gradient verschwindend klein wird, ist ein Minimum der Kostenfunktion erreicht. Die numerische Implementierung des Verfahrens zur Bestimmung der Sonnenwindparameter beinhaltet ein Unterprogramm zum Lösen des Magnetosheathmodells nach dem Schema aus Abbildung 4.6, bei dem am Ende noch die Kostenfunktion zu gegebenen Sonnenwindparametern bestimmt wird. Der Gradient wird über ein adjungiertes Modell dieses Unterprogramms berechnet.

Das adjungierte Modell wird durch das Tool OpenAD/F erstellt (Utke et al. 2008). An das Unterprogramm, das das Magnetosheathmodell beinhaltet, werden die Sonnenwindparameter übergeben und der Wert der Kostenfunktion zurückgegeben. Um das Unterprogramm für die Anwendung des OpenAD/F-Tools zu präparieren, müssen die unabhängigen Variablen, wie die Sonnenwinddichte ( $\rho_{\text{SW}}$ ), durch `!$ openad INDEPENDENT( $\rho_{\text{SW}}$ )` deklariert werden. Die Kostenfunktion ( $cost$ ) muss als abhängige Variable durch `!$ openadDEPENDENT( $cost$ )` deklariert werden. Das Tool transformiert dann eine gewöhnliche Fortran-Variable in eine Struktur, die zum einen den Wert der Variablen  $y\%v$  und zum anderen den Wert der Ableitung der Kostenfunktion bezüglich dieser Variablen  $y\%d$  abspeichert. Damit ist es möglich, einen adjungierten Code zu erstellen. Die Ableitung der Kostenfunktion wird mit 1 initialisiert, weil die Ableitung der Kostenfunktion bezüglich selbiger 1 ergibt. Dann kann das OpenAD/F-Tool auf den präparierten Code

angewandt werden. Als Erstes führt das Tool eine lexikale, syntaktische und semantische Analyse durch, die auf eine Zwischendarstellung, die *whirl* genannt wird, führt. Dann erstellt das OpenAnalysis-Modul des OpenAD/F-Tools Aufruf- und Kontrollflussgraphen (englisch: call and flow graphs). Diese Information wird dann kombiniert mit dem *whirl* Code zu einer neuen Darstellung die *xaif* genannt wird. Diese Darstellung des Codes wird in einen Code umgewandelt, der den gesuchten Gradienten parallel zu seiner Ausführung über das *xaifBooster*-Modul berechnet. Zum Schluss wird der Code in Fortran-Code übersetzt. Ein Aufruf dieses neuen Unterprogramms ist dann in der Lage den Gradienten zu berechnen. Für die 4 unabhängigen Parameter, die hier betrachtet werden, also  $\rho_{sw}$ ,  $v_{sw}$ ,  $B_{sw}$  und  $p_{sw}$ , kann das adjungierte Modell die Rechnung schneller durchführen als eine Berechnung über finite Differenzen (siehe auch Kap. 3.2).

Bei der Analyse der Kostenfunktion stellt sich heraus, dass die Kostenfunktion zwar ein globales Minimum hat, dieser Funktionsverlauf jedoch von sehr kleinen lokalen Minima überlagert ist. Diese lokalen Minima rühren aus der iterativen Berechnung der Bugstoßwellenposition her, wie sie in Abbildung 4.6 beschrieben ist. Der Bugstoßwellenabstand wird genutzt, um  $v_{y10}$  und  $v_{z01}$  zu berechnen. Kleine Änderungen dieser Werte ändern den Wert der Kostenfunktion anders als es der globale Verlauf vorhersagt. Falls eine Berechnung des Gradienten über finite Differenzen gemacht würde, könnten die lokalen Minima durch eine Schrittweite, die größer als die lokalen Minima ist, übergangen werden. Allerdings ist es schwierig die korrekte Schrittlänge zu bestimmen, da diese abhängig von den Sonnenwindbedingungen variieren kann.

Für die Gradientenberechnung durch automatisches Differenzieren werden analytische Ausdrücke verwendet, sodass keine Schrittweitenanpassung möglich ist. Ohne weitere Modifikationen des Codes wird der Gradient bezüglich der lokalen Minima berechnet. Als Beispiel wird hier eine eindimensionale Kostenfunktion  $h(x) := h_q(x) + h_o(x)$  mit der quadratischen Funktion  $h_q(x) := x^2$  und Schwingungsfunktion  $h_o(x) := (\cos(10x) - 1)^2$  betrachtet. Das globale Minimum der Kostenfunktion wird durch die quadratische Funktion bestimmt, die monoton in Richtung des globalen Minimums abfällt. Diese quadratische Funktion ist jedoch durch die Schwingungsfunktion mit lokalen Minima überlagert. Die Ableitung der Kostenfunktion ist  $\partial_x h(x) = 2x - 20 \sin(10x) (\cos(10x) - 1)$ , wobei der hintere Term aufgrund des Beitrags der Schwingungsfunktion zustande kommt ( $\partial_x h_o(x)$ ). Wird nun ein Minimum in Richtung der Ableitung gesucht, wird in der Regel eines der lokalen Minima gefunden. Dieses Problem kann behoben werden, indem  $h_o(x)$  durch eine Summe von Stufenfunktionen  $\tilde{h}_o(x) \approx \sum_i a_i \theta(x - x_i)$  approximiert wird, mit Koeffizienten  $a_i$  und  $x_i$  sowie der Stufenfunktion  $\theta(x)$ . Die analytische Ableitung von  $\tilde{h}_o(x)$  verschwindet für  $x \neq x_i$ . Daher ist  $\partial_x h(x) = \partial_x h_q(x) + \partial_x \tilde{h}_o(x) = \partial_x h_q(x) = 2x$ . Entlang dieser Ableitung gelangt man stets zum globalen Minimum.

Im hier genutzten Reihenentwicklungsmodell der Erde rufen die Modifikationen von  $v_{y10}$  und  $v_{z01}$  die lokalen Minima hervor, die durch das Einführen von Stufenfunktionen ausgeschlossen werden können. Dazu werden die berechneten Werte der tangentialen Geschwindigkeitsableitungen gerundet. Dabei ist der Rundungsfehler so gewählt, dass er in der Größenordnung des numerischen Fehlers liegt und somit den Wert der Kostenfunktion nicht wesentlich beeinflusst. Die Berechnung von  $v_{y10}$  und  $v_{z01}$  trägt so nicht mehr zur Gradientenberechnung bei und man erhält einen Gradienten bezüglich des globalen Minimums.

Abbildung 8.1 zeigt den globalen Verlauf der Kostenfunktion in Abhängigkeit der



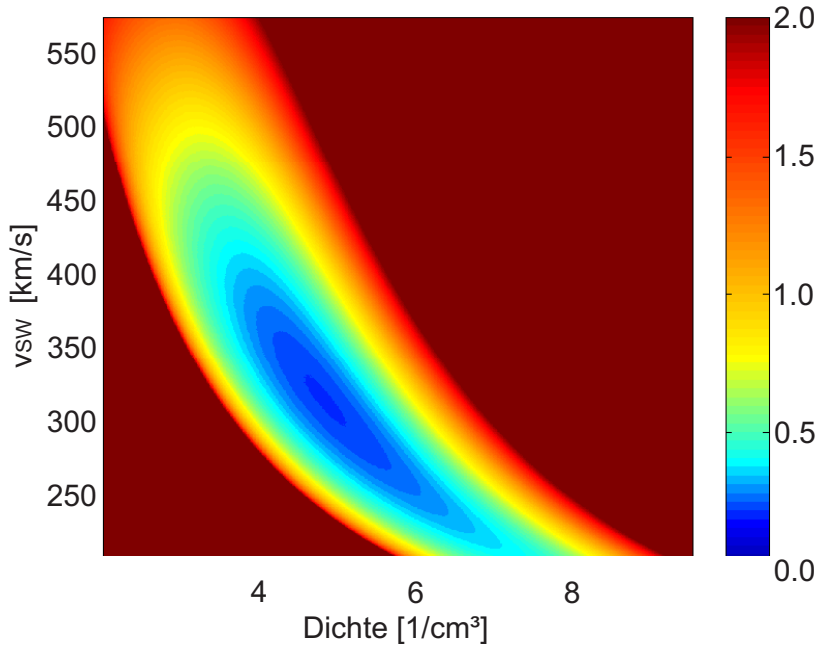


Abbildung 8.1: Wert der Kostenfunktion in Abhängigkeit der Teilchendichte und der Geschwindigkeit des Sonnenwinds (nach Nabert et al. 2015). Das globale Minimum kann über ein gradientenbasiertes Minimierungsverfahren berechnet werden.

Sonnenwinddichte  $\rho_{sw}$  und der Sonnenwindgeschwindigkeit  $v_{sw}$ . Dabei wurde der Grenzfall betrachtet, bei dem sowohl das Sonnenwindmagnetfeld als auch der Gasdruck beziehungsweise die Temperatur gegen Null geht. Die beobachteten physikalischen Größen des Raumfahrzeugs wurden für die Ionendichte auf  $N_{SC} = 20.4 / \text{cm}^3$ , die Geschwindigkeit in  $x$ -Richtung  $v_{SC} = 48.0 \text{ km/s}$ , das Magnetfeld in  $z$ -Richtung  $B_{SC} = 0.1 \text{ nT}$  und den Druck  $p_{SC} = 0.59 \text{ nPa}$  gesetzt, die bei einer Position von  $x_{SC} = 12.8 R_E$ ,  $y_{SC} = 0.9 R_E$  und  $z_{SC} = 3.1 R_E$  gemessen wurden. Die roten Bereiche in der unteren linken und der oberen rechten Ecke gehören zu Werten der Kostenfunktion, wo sich das Raumfahrzeug an einer Position im Modell außerhalb der Magnetosheath befindet. Dort stimmen Daten und Modelllösung schlecht überein, sodass sich ein hoher Wert für die Kostenfunktion ergibt. Die Werte der physikalischen Größen außerhalb der Magnetosheath werden auf der erdzugewandten Seite auf die Werte an der Magnetopause gesetzt, bis auf die Werte des Magnetfeldes, die erdwärts ansteigen. Der mittlere Bereich in Abbildung 8.1 zeigt ein globales Minimum, welches durch ein Gradientenverfahren zu bestimmen ist.

Durch das Runden in den Ableitungen der tangentialen Geschwindigkeiten werden die kleinen lokalen Minima vernachlässigt. Um sicherzugehen, dass das globale Minimum korrekt bestimmt wurde, wird die Kostenfunktion auf einem Gitter um das Minimum, einige Schritte in jede Parameterrichtung, berechnet. Dazu wurden die Schrittweiten  $\Delta N = 0.035 / \text{cm}^3$ ,  $\Delta v = 2 \text{ km/s}$ ,  $\Delta B = 0.035 \text{ nT}$  und  $\Delta p = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ nPa}$  benutzt. Diese geben dann auch die Genauigkeit der rekonstruierten Sonnenwindparameter an.

## 8.2 Anwendung

Im Reihenentwicklungsmodell der Erde wurde die Zeitauflösung durch die Annahme einer quasi-stationären Zeitentwicklung beschränkt. Dabei wurde die typische Zeitskala in Kapitel 4.5 mit 10 min – 20 min abgeschätzt. Die Temperatur ist ein Moment zweiter Ordnung bezüglich der Geschwindigkeitsverteilung und, im Gegensatz zu Momenten nullter und erster Ordnung, nur schwer präzise zu bestimmen. Daher wird in diesem Kapitel der Sonnenwind erneut als ein kaltes Plasma genähert. Für das Sonnenwindplasma und seine Wechselwirkung mit der Erde hat diese Näherung meist keinen großen Einfluss auf die Rekonstruktion der Sonnenwindparameter. Die Temperatur nullter Ordnung  $T_0$  steht über  $\rho_0 k_B T_0 = p_0$  in Beziehung zum Gasdruck  $p_0$ , mit der Boltzmann-Konstanten  $k_B = 1.3806488 \cdot 10^{-23}$  J/K.

### 8.2.1 Rekonstruktion nahe der Stagnationslinie

Um die Rekonstruktionsmethode zu testen, werden Daten der THEMIS-Mission genutzt, bei der ein Satellit die Magnetosheath durchquert und sich ein zweiter zum Überprüfen der Rekonstruktion im Sonnenwind befindet. Zunächst werden dabei Messungen in der Magnetosheath nahe der Stagnationslinie betrachtet.

Als Erstes wird der Magnetosheathdurchgang vom THEMIS-Raumfahrzeug THC am 1. August 2009 betrachtet. Dabei durchquert der Satellit die Magnetopause nahe des Stagnationspunktes und erreicht etwa 2.5 h später die Bugstoßwelle nahe des subsolaren Punktes. Die zugehörigen THC-Magnetosheathdaten sowie die am besten passende Modellvorhersage, die für beliebige Sonnenwindbedingungen gefunden werden konnte, sind in Abbildung 8.2 gezeigt. Dabei sind die Daten in den Koordinaten des Reihenentwicklungsmodells ausgedrückt, mit der  $z$ -Richtung entlang der Dipolachse. Man kann erkennen, dass Beobachtungen und Modellvorhersagen gut übereinstimmen. Lediglich an der Magnetopause und an der Bugstoßwelle gibt es signifikante Unterschiede. Das Magnetosheathmodell stellt die Bugstoßwelle durch Sprünge, die durch die Rankine-Hugoniot-Bedingungen gegeben sind, dar. Dies ist eine Approximation im Rahmen der idealen MHD des in Wirklichkeit kontinuierlichen Übergangs. Das zuvor beschriebene Verfahren zur Datenassimilation ordnet die Werte in der Übergangsregion entweder dem Wert vor oder nach der Stoßwelle im idealen MHD-Modell zu, was zu einer schlechten Anpassung führt. Die Magnetopause ist im Modell eine Grenze für den Sonnenwind. Dies vernachlässigt allerdings beispielsweise Effekte von hochenergetischen Teilchen, die die Magnetopause durchqueren können, sodass die Anpassung dort fehlerbehaftet ist.

Das Magnetosheathmodell wurde in die Magnetosphäre ausgedehnt. Nahe der Magnetopause haben die Geschwindigkeit, die Dichte und das Magnetfeld die Werte, die sie auch an der Magnetopause haben. Daher gelingt es, die magnetosphärischen Werte mit dem Modell approximativ zu reproduzieren. Beispielsweise würde eine andere Wahl von Sonnenwindrandbedingungen des Modells zu einem anderen Magnetfeld an der Magnetopause führen und damit würde das Magnetfeld der Magnetosphäre nicht mehr zu den Beobachtungen passen. Die Rekonstruktion von Sonnenwindbedingungen liefert jedoch nur nahe der Magnetopause korrekte Werte und kann nicht weit weg in der Magnetosphäre durchgeführt werden.

Die rekonstruierten Sonnenwindparameter sind in Abbildung 8.3 zusammen mit

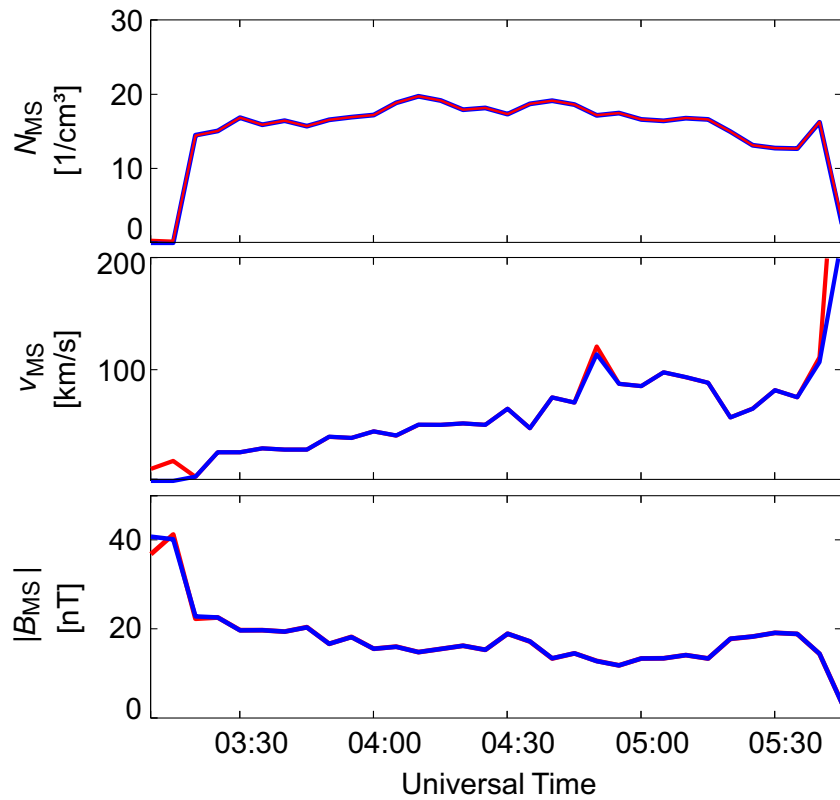


Abbildung 8.2: Die Beobachtungen vom 1. August 2009 von THC für die Dichte (oben), die Geschwindigkeit (mitte) und das Magnetfeld (unten) in der Magnetosheath sind in rot dargestellt (nach Nabert et al. 2015). Die beste Übereinstimmung für Daten und Magnetosheathmodell für beliebige Sonnenwindbedingungen wurde für die in blau dargestellten Werte des Magnetosheathmodells gefunden.

OMNI-Sonnenwinddaten und den Sonnenwindbeobachtungen vom THB dargestellt. Die aus den Magnetosheathdaten berechneten Sonnenwindparameter zeigen eine gute Übereinstimmung mit den Sonnenwindmessungen. Das erste 10 min Intervall wurde dabei aus Daten der Magnetosphäre rekonstruiert. Aufgrund der magnetosphärischen Erweiterung der Magnetosheathlösung können die Sonnenwindparameter auch hier approximativ geschätzt werden.

Zwischen 03:20 UT und 05:00 UT unterscheiden sich die Dichte des Sonnenwinds aus OMNI-Daten, aus THB-Daten und aus der Rekonstruktion von THC-Daten etwas. Dies kann beispielsweise auf ein Raumfahrzeugpotenzial zurückgeführt werden (McFadden et al. 2008). Da sich THB etwa  $12 R_E$  in  $y$ -Richtung von THC entfernt befindet, ist es auch denkbar, dass beide Raumfahrzeuge aufgrund ihres Abstands zueinander räumliche Unterschiede im Sonnenwind beobachten. Die Dichtevariation in den Sonnenwindbeobachtungen zwischen 05:15 UT und 5:40 UT ist auch in den rekonstruierten Sonnenwindparametern vorhanden. Der mittlere Wert der Sonnenwindgeschwindigkeit wird ebenfalls gut aus den THC-Daten geschätzt. Das Sonnenwindmagnetfeld erhöht sich während des Magnetosheathdurchgangs, was ebenfalls in der Rekonstruktion der Sonnenwindbedingungen zu sehen ist.

Es wird sichergestellt, dass der Optimierungsalgorithmus, unabhängig von den ver-

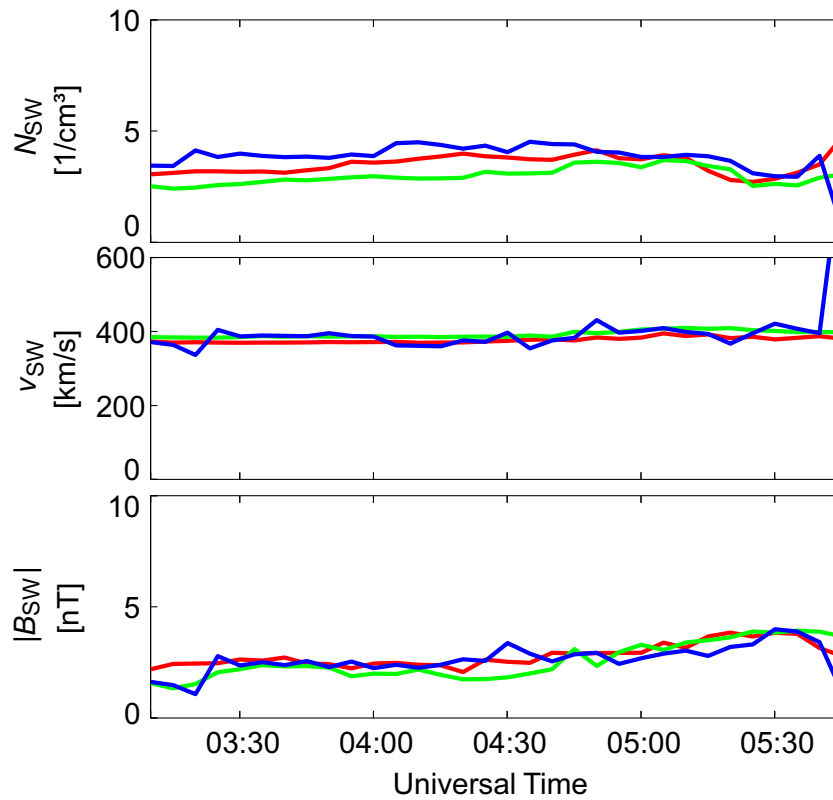


Abbildung 8.3: Die rekonstruierten Sonnenwindparameter des Modells für die Magnetosheathdaten, die in Abbildung 8.2 gezeigt wurden (nach Nabert et al. 2015). Dabei sind die Dichte (oben), die Geschwindigkeit (mitte) und das Magnetfeld (unten) in blau dargestellt. Zusätzlich sind die Sonnenwindbeobachtungen während des Zeitintervalls von THB in rot und OMNI-Sonnenwinddaten in grün gezeigt.

wendeten Anfangswerten, dieselben Sonnenwindparameter schätzt. Als Beispiel ist die Minimierung der Kostenfunktion des Datenpunktes bei 05:30 UT aus Abbildung 8.2 für drei verschiedene Werte der Dichte in Abbildung 8.4 gezeigt. Eine andere Wahl für den Anfangswert der Dichte führt zu demselben Schätzer der Dichte, lediglich die benötigte Anzahl der Iterationsschritte ist unterschiedlich.

Es wird ein weiterer Magnetosheathdurchgang nahe der Staupunktstromlinie betrachtet, um das Verfahren zur Rekonstruktion von Sonnenwindbedingungen weiter zu untersuchen. Am 28. September 2008 durchquerte das THC-Raumfahrzeug zunächst die Bugstoßwelle und anschließend die Magnetosheath. Die zugehörigen THC-Beobachtungen und die am besten passende Modellberechnung für beliebige Sonnenwindparameter sind in Abbildung 8.5 gezeigt. Die Bugstoßwelle befindet sich auf der linken und die Magnetopause auf der rechten Seite. Das Modell repräsentiert die Daten sehr gut, ausgenommen von der Region um die Bugstoßwelle, wie schon am vorherigen Beispiel diskutiert wurde.

Die zugehörige Rekonstruktion der Sonnenwindparameter ist, zusammen mit OMNI- und THB-Sonnenwinddaten während des Intervalls in Abbildung 8.6 zu sehen. Dabei ist zu beachten, dass ab 20:15 UT das Raumfahrzeug THB in die Magnetosheath eintritt, weshalb anschließend keine Sonnenwindmessungen von THB mehr zur Verfügung stehen. Die Sonnenwinddichte variiert im untersuchten Zeitintervall zwischen  $4/\text{cm}^3$

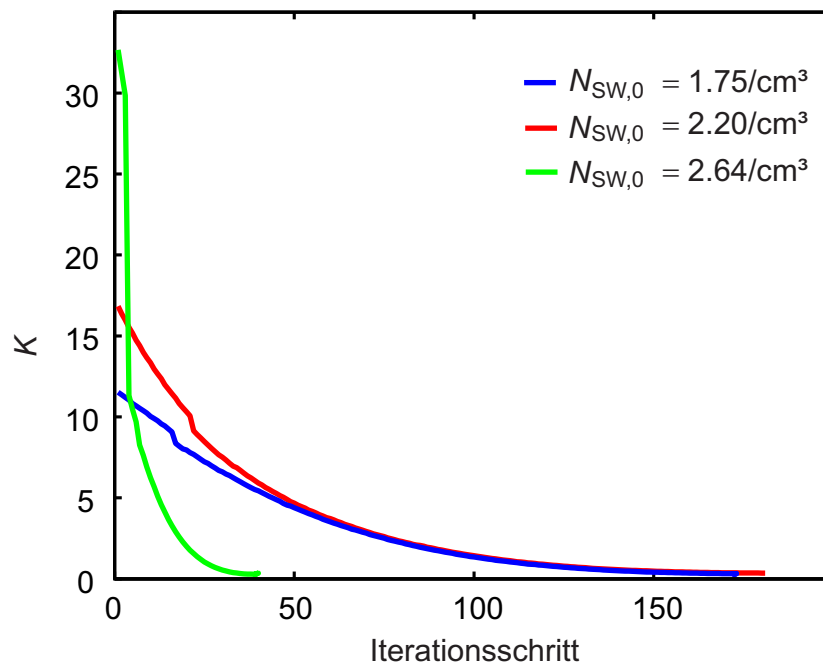


Abbildung 8.4: Der Wert der Kostenfunktion für drei unterschiedliche Teilchendichten des Sonnenwinds als Startwerte  $N_{\text{SW},0}$  der Minimierung der Kostenfunktion (nach Nabert et al. 2015). Unabhängig vom Anfangswert konvergiert die Kostenfunktion gegen identische Werte für die Sonnenwindbedingungen.

und  $7/\text{cm}^3$ . Die rekonstruierten Sonnenwindparameter reproduzieren diese Variationen auf Zeitskalen größer 15 min. Beispielsweise stimmen die Senke in der Dichte um 16:25 UT und der Anstieg um 18:15 UT von Rekonstruktion und Beobachtungen gut überein. Die Variationen werden gut reproduziert, allerdings weist die rekonstruierte Sonnenwinddichte einen Versatz von etwa  $0.2/\text{cm}^3$  zu den Sonnenwinddaten auf. Solch ein Versatz kann zum Beispiel durch ein Raumfahrzeugpotenzial erklärt werden (McFadden et al. 2008). Vergleicht man Daten, wo sich sowohl THB als auch THC im Sonnenwind befinden, lässt sich häufig um einen Versatz von bis zu 20% zwischen den Dichtedaten der Raumfahrzeuge beobachten. Daher wird der Datenfehler bezüglich einer Abweichung mit etwa 20% angenommen.

Die Schätzung der Sonnenwindgeschwindigkeit reproduziert die Sonnenwindvariationen, wie sie um 16:50 UT beobachtet wurden. Jedoch ist auch hier wieder zu beobachten, dass es in der Rekonstruktion der Geschwindigkeit zusätzliche kleine Variationen auf Zeitskalen kleiner als 10 min gibt, welche nicht oder zumindest weniger stark ausgeprägt in den Sonnenwinddaten zu sehen sind, wie zum Beispiel um 18:10 UT. Sowohl die Sonnenwinddaten untereinander als auch die Rekonstruktion haben einen kleinen Versatz zueinander.

Das Magnetfeld ist während des Magnetosheathdurchgangs ungefähr in  $z$ -Richtung und variiert zwischen 3 nT und 6 nT. Ähnlich zu den Dichtevvariationen sind auch die Variationen im Magnetfeld auf Skalen größer als 15 min gut geschätzt, wie beispielsweise im Abfall des Magnetfeldes bei 15:40 UT, bei 18:00 UT und bei 19:00 UT zu erkennen ist.

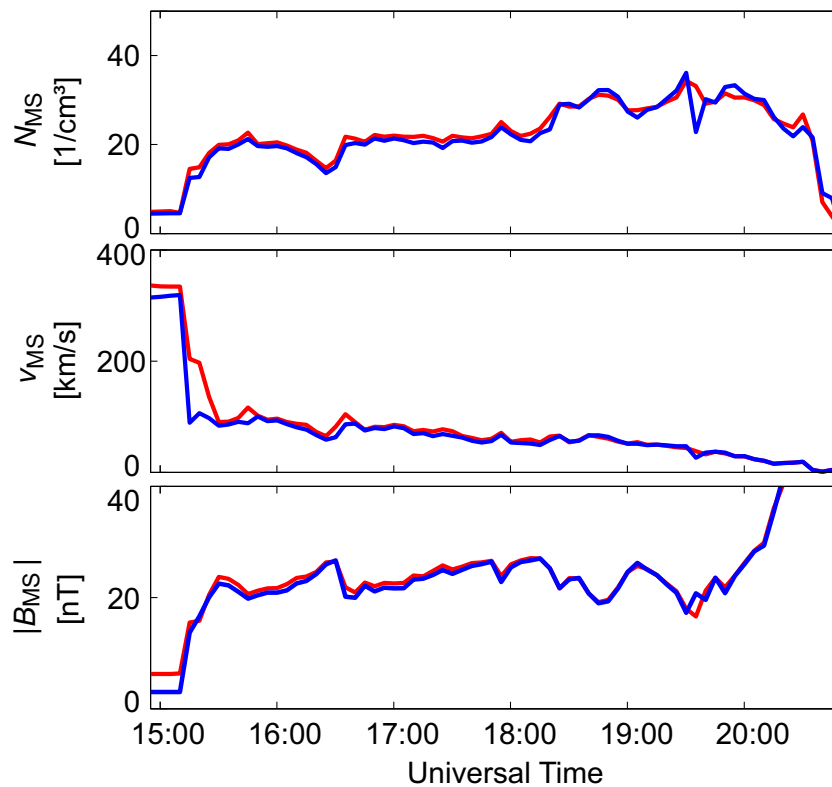


Abbildung 8.5: Die Beobachtungen vom 28. September 2008 von THC für die Dichte (oben), die Geschwindigkeit (mitte) und das Magnetfeld (unten) in der Magnetosheath sind in rot dargestellt (nach Nabert et al. 2015). Die beste Übereinstimmung für Daten und Magnetosheathmodell für beliebige Sonnenwindbedingungen wurde für die in blau dargestellten Werte des Magnetosheathmodells gefunden.

Als Letztes wird noch ein dritter Magnetosheathdurchgang genutzt, um die Rekonstruktionsmethode zu testen. Dabei werden die Sonnenwindbedingungen aus den Magnetosheathdaten vom 16. September 2008 geschätzt. Die Magnetosheathdaten stimmen gut mit dem Modell überein, ähnlich wie bei den zuvor diskutierten Beispielen. In Abbildung 8.7 wird die Rekonstruktion des Sonnenwindes mit den THB- und OMNI-Sonnenwinddaten verglichen. Die Dichte- und Magnetfeldvariation bei 19:35 UT ist sowohl in THB-Daten als auch in der Rekonstruktion zu sehen, jedoch nicht in den OMNI-Sonnenwinddaten. Dies legt nahe, dass es sich hier um ein lokales Sonnenwindphänomen handelt. Die Rekonstruktion kann folglich die lokalen Sonnenwindvariationen besser reproduzieren als es die OMNI-Daten können.

## 8.2.2 Rekonstruktion neben der Stagnationslinie

Das hier verwendete Reihenentwicklungsmodell nullter Ordnung ist auf die Region nahe der Stagnationslinie beschränkt. Um die Auswirkungen bei der Verwendung des Modells nullter Ordnung in der Rekonstruktion in einigem Abstand neben der Stagnationslinie zu untersuchen, wird der Magnetosheathdurchgang vom 24. August 2008 betrachtet, bei dem sich das THC-Raumfahrzeug etwa  $5-6 R_E$  neben der Stagnationslinie befindet. Die

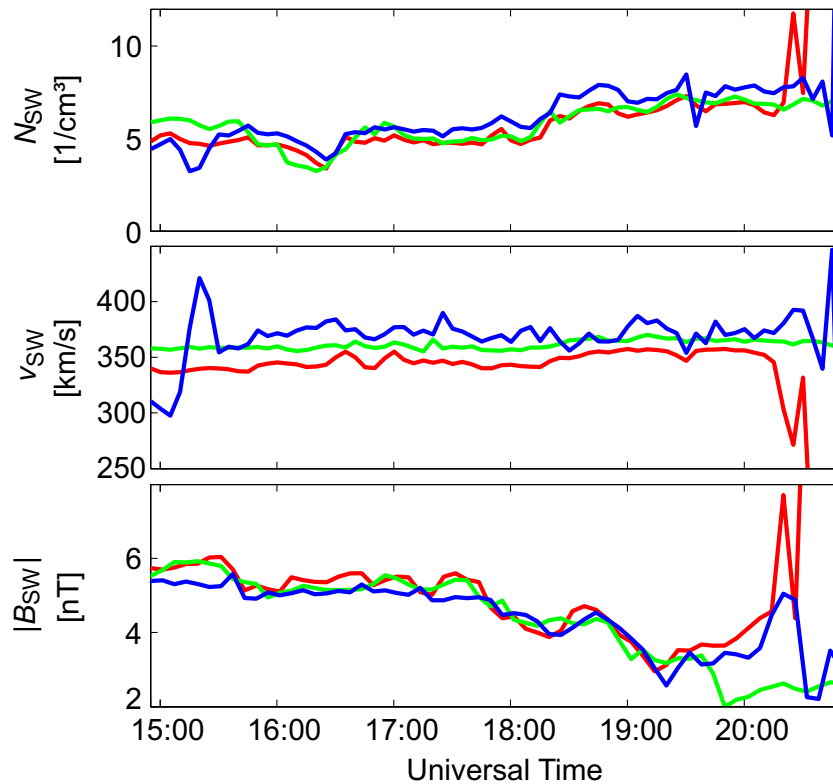


Abbildung 8.6: Die rekonstruierten Sonnenwindparameter des Modells für die Magnetosheathdaten, die in Abbildung 8.5 gezeigt wurden (nach Nabert et al. 2015). Dabei sind die Dichte (oben), die Geschwindigkeit (mitte) und das Magnetfeld (unten) in blau dargestellt. Zusätzlich sind die Sonnenwindbeobachtungen während des Zeitintervalls von THB in rot und OMNI-Sonnenwinddaten in grün gezeigt.

zugehörigen Daten für die Dichte, die Geschwindigkeit und das Magnetfeld sind in Abbildung 8.8 zu sehen. Wie in der rechten Hälfte der Abbildung zu erkennen ist, unterscheiden sich die Dichten nahe der Magnetopause. Diese Abweichungen können entstehen, da bei der Schätzung nicht nur die Informationen über die Dichte, die Geschwindigkeit und das Magnetfeld, sondern auch der Ort an dem der zugehörige Datenpunkt gemessen wurde, berücksichtigt wird. Daher werden mehr Parameter genutzt ( $x_{SC}$ ,  $y_{SC}$ ,  $z_{SC}$ ,  $\rho_{SC}$ ,  $v_{SC}$ ,  $B_{SC}$  und  $p_{SC}$ ) als es freie, zu bestimmende Sonnenwindparameter gibt ( $\rho_{SW}$ ,  $v_{SW}$ ,  $B_{SW}$  und  $p_{SW}$ ). Die Ursache der Abweichungen kann von den Approximationen des Modells oder auch von Datenfehler herrühren.

Die aus den Magnetosheathdaten rekonstruierten Sonnenwindparameter sowie die zugehörigen OMNI- und die THB-Sonnenwinddaten sind in Abbildung 8.9 zu sehen. Die Sonnenwinddichten von THB und OMNI zeigen einen Versatz von etwa 15%. Da sich Elektronen- und Ionendichte leicht voneinander unterscheiden, könnte ein Raumfahrzeugpotenzial vorhanden sein, das diesen Unterschied hervorruft. Es wird um 00:50 UT eine Dichteerhöhung in den rekonstruierten Sonnenwindbedingungen beobachtet, nicht aber in den Sonnenwinddaten. Der zugehörige Peak der Dichte ist auch in den Magnetosheathdaten in Abbildung 8.8 zu sehen. Dies könnte einerseits auf eine lokale Dichtevariation oder andererseits einen zeitabhängigen Prozess unterhalb der quasi-stationären Zeitska-

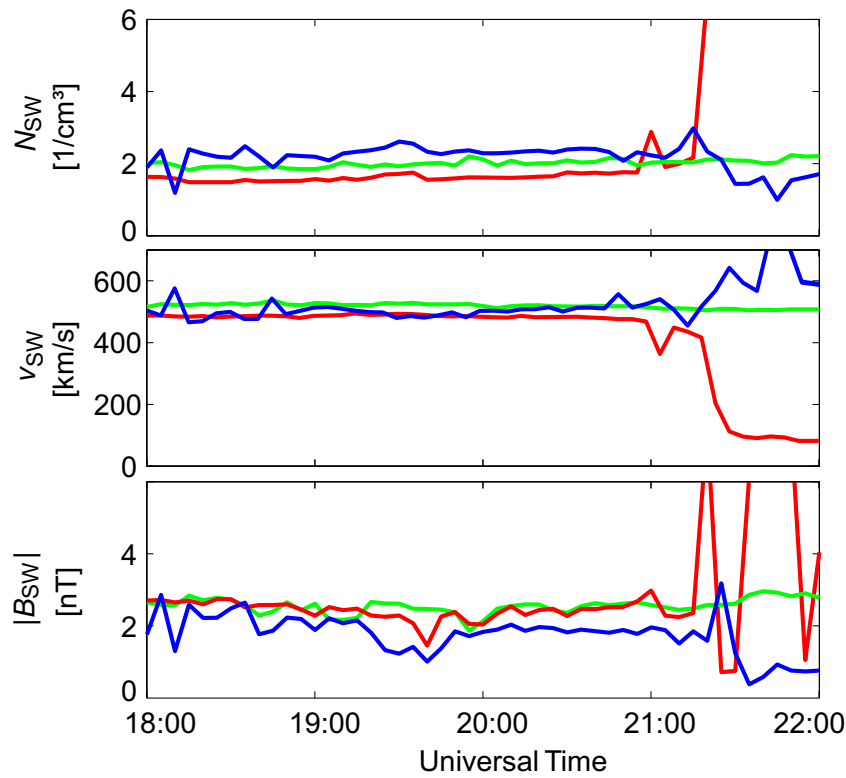


Abbildung 8.7: Die rekonstruierten Sonnenwindparameter für den Magnetosheathdurchgang vom 16. September 2008 (nach Nabert et al. 2015). Dabei sind die Dichte (oben), die Geschwindigkeit (mitte) und das Magnetfeld (unten) in blau dargestellt. Zusätzlich sind die Sonnenwindbeobachtungen während des Zeitintervalls von THB in rot und OMNI-Sonnenwinddaten in grün gezeigt.

la des Modells zurückgeführt werden. Abgesehen von dieser lokalen Variation ist der Unterschied zwischen Rekonstruktion und Sonnenwinddaten in den ersten 1.5 h zu den vorherigen Resultaten ähnlich gering. Näher an der Magnetopause sagen die berechneten Sonnenwindparameter seinen kontinuierlichen Anstieg der Sonnenwindgeschwindigkeit vorher. Im Gegensatz dazu zeigen die Sonnenwindmessungen eine nahezu konstante Sonnenwindgeschwindigkeit.

Es wurden weitere Magnetosheathdurchgänge neben der Stagnationslinie betrachtet. Dabei stellte sich heraus, dass nahezu alle betrachteten Durchgänge einen systematischen Anstieg der Sonnenwindgeschwindigkeit zur Magnetopause hin vorhersagen. Der Anstieg ist dabei stärker, je weiter sich das Raumfahrzeug von der Stagnationslinie weg befindet. Die Geschwindigkeitsverteilung des Sonnenwinds ist nicht korreliert mit der Position des Raumfahrzeugs. Daher ist kein Anstieg der Sonnenwindgeschwindigkeit in allen Rekonstruktionen neben der Stagnationslinie zu erwarten. Deshalb kann der systematische Anstieg in der Geschwindigkeit nur auf die Beschränkung des Modells auf die Region nahe der Stagnationslinie aufgrund der verwendeten nullten Ordnung im Reihenentwicklungsmodell zurückgeführt werden. Es sei bemerkt, dass diese Beschränkung des Modells anhand des systematischen Geschwindigkeitsanstiegs auch ohne Sonnenwinddaten festgestellt werden kann.

Das Modell sagt einen ungefähr linearen Geschwindigkeitsabfall auf der Stagnati-



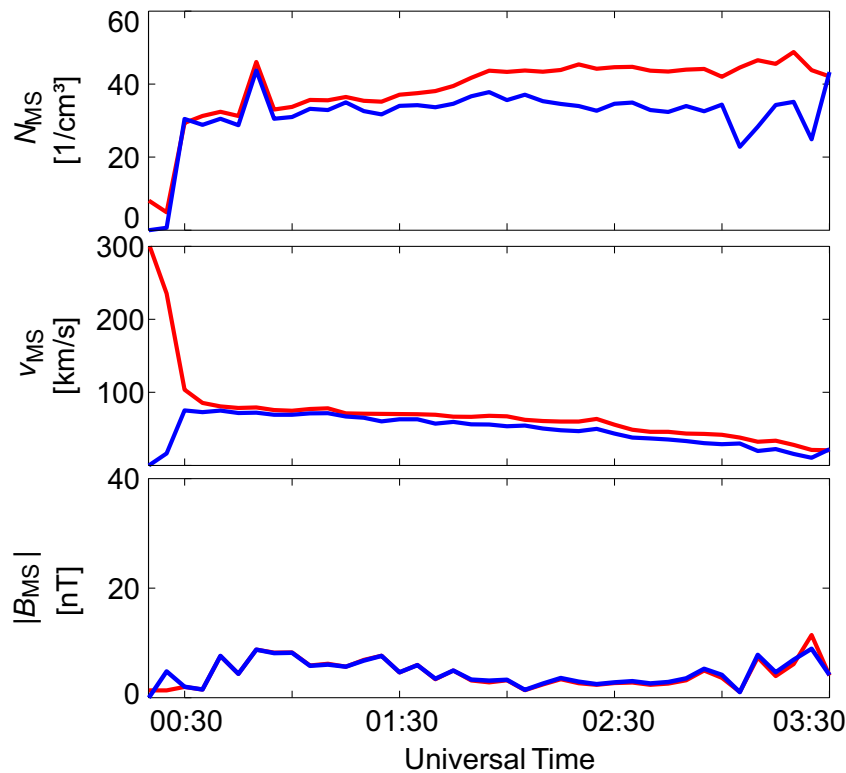


Abbildung 8.8: Die Beobachtungen vom 24. August 2008 von THC für die Dichte (oben), die Geschwindigkeit (mitte) und das Magnetfeld (unten) in der Magnetosheath sind in rot dargestellt (nach Nabert et al. 2015). Die beste Übereinstimmung für Daten und Magnetosheathmodell für beliebige Sonnenwindbedingungen wurde für die in blau dargestellten Werte des Magnetosheathmodells gefunden.

onslinie in der Magnetosheath vorher. Neben der Stagnationslinie nimmt die Geschwindigkeit in der Magnetosheath ebenfalls ab, jedoch verbleibt ein endlicher Wert vor der Magnetopause, welcher erst beim Magnetopausendurchgang zu Null wird. Um die Sonnenwindparameter auch hier korrekt rekonstruieren zu können, wird jedoch ein Modell zweiter Ordnung benötigt.

### 8.3 Simultane Schätzung von Sonnenwind- und Magnetfeldparametern

Bisher wurden in den Kapiteln 3.4 und 7.2 lediglich solche Daten aus der Wechselwirkungsregion zum Schätzen des planetaren Magnetfeldes verwendet, bei denen zeitgleich Sonnenwindmessungen vorhanden waren. Allerdings ist es grundsätzlich auch möglich, wenn sich zwei Raumfahrzeuge innerhalb der Wechselwirkungsregion befinden, das planetare Magnetfeld aus diesen Daten zu bestimmen. Dabei werden die Daten beider Raumfahrzeuge genutzt, um sowohl die Sonnenwindparameter als auch die Parameter des planetaren Magnetfeldes simultan zu schätzen. Mit einem initial angenommenen planetaren Magnetfeld lässt sich ein erster Schätzer für die zugehörigen Sonnenwindbedingungen aus den Magnetosheathdaten des ersten Raumfahrzeugs rekonstruieren. Anschließend

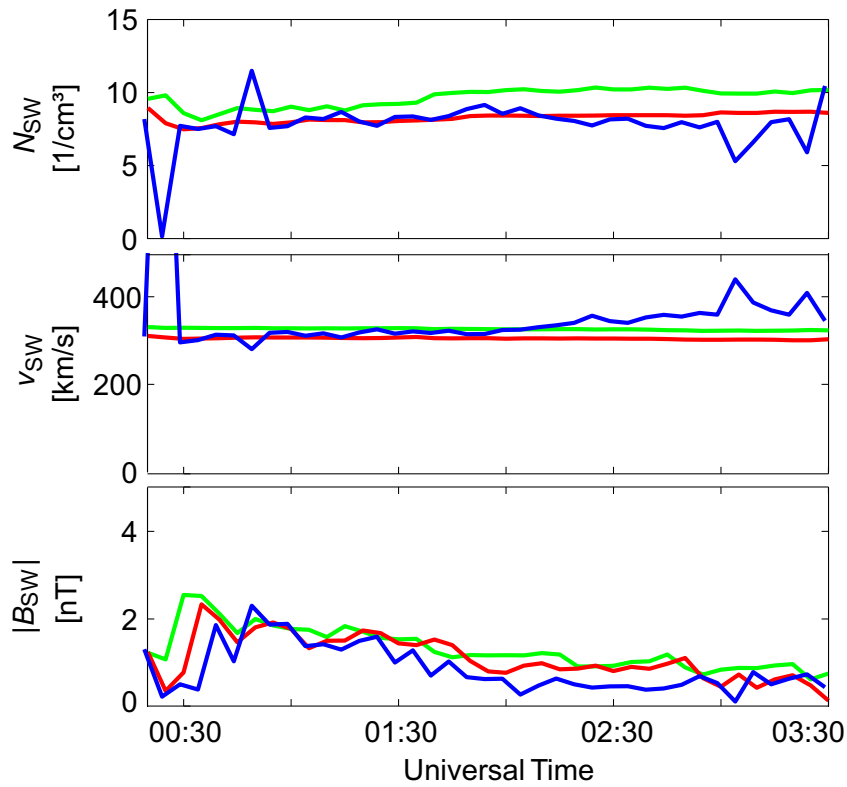


Abbildung 8.9: Die rekonstruierten Sonnenwindparameter des Modells für die Magnetosheathdaten, die in Abbildung 8.8 gezeigt wurden (nach Nabert et al. 2015). Dabei ist Dichte (oben), die Geschwindigkeit (mitte) und das Magnetfeld (unten) in blau dargestellt. Zusätzlich sind die THB-Sonnenwindbeobachtungen während des Zeitintervalls von THB in rot und OMNI-Sonnenwinddaten in grün gezeigt.

kann dieser erste Schätzer für die Sonnenwindbedingungen genutzt werden, um mit den Daten des zweiten Raumfahrzeugs einen neuen Schätzer für die planetaren Magnetfeldparameter zu bestimmen. Damit lassen sich iterativ die Sonnenwindbedingungen erneut berechnen, mit denen wieder ein neuer Schätzer für das planetare Magnetfeld zu bestimmen ist.

Dieser iterative Prozess wird durchgeführt, bis sich die Schätzer für das planetare Magnetfeld und den Sonnenwind in diesem Verfahren nicht mehr signifikant ändern. Als Ergebnis erhält man sowohl das geschätzte planetare Magnetfeld als auch die geschätzten Sonnenwindbedingungen. Bei diesem iterativen Vorgehen wird sowohl die Schätzung der Sonnenwindbedingungen als auch die Schätzung der planetaren Magnetfeldparameter mehrfach durchgeführt. Dieses laufzeitintensive Verfahren ließ sich erstmalig in dieser Arbeit mithilfe des Reihenentwicklungsmodells nullter Ordnung in dieser Arbeit durchführen.

Zum Testen des Verfahrens der simultanen Schätzung von Sonnenwind- und Magnetfeldparametern werden wieder Daten der THEMIS-Mission genutzt. Aus den Magnetosheathdaten von THC vom 16. September 2008 wurden bereits die Sonnenwindparameter erfolgreich rekonstruiert und mit den Sonnenwindbeobachtungen von THB in Abbildung 8.7 verglichen. Die Satelliten THD und THE der THEMIS-Mission befinden sich,

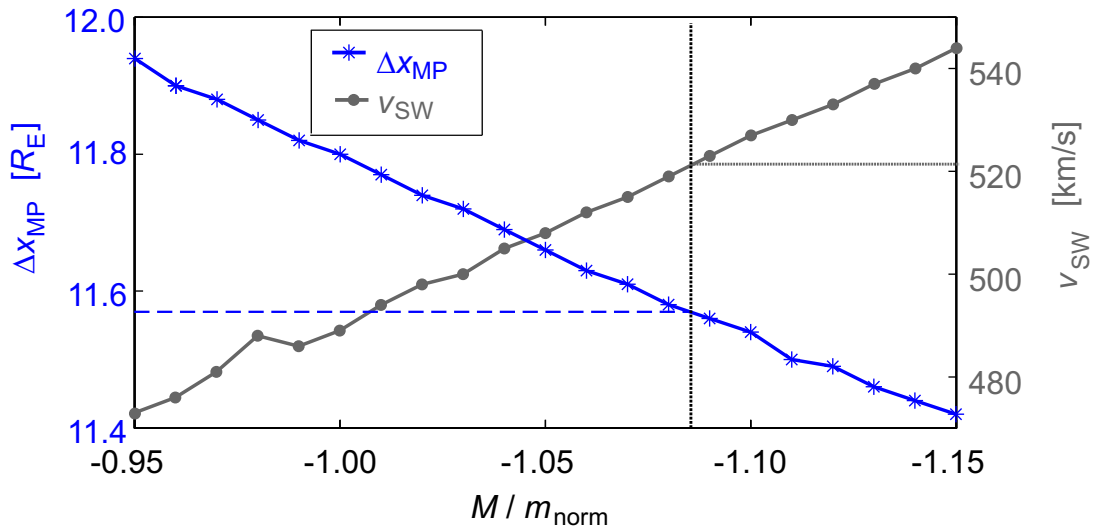


Abbildung 8.10: Simultane Schätzung des Dipolmoments und der Sonnenwindparameter aus Messungen von zwei Raumfahrzeugen in der Magnetosheath zu einem Zeitpunkt. Es wurden die Sonnenwindbedingungen aus den Daten des ersten Raumfahrzeugs, hier durch die Sonnenwindgeschwindigkeit  $v_{\text{SW}}$  repräsentiert, für verschiedene Dipolmomente  $M$  rekonstruiert (schwarze Kurve). Dabei ergeben sich auch unterschiedliche Magnetopausenabstände  $\Delta x_{\text{MP}}$  (blaue Kurve). Diese werden mit dem vom zweiten Raumfahrzeug gemessenen Magnetopausenabstand von  $11.57 R_E$  verglichen. Es folgt eine eindeutige Lösung für alle Parameter (gestrichelte Linie).

verglichen mit THB und THC, auf kleineren Umlaufbahnen um die Erde. Zur Zeit des Magnetosheathdurchgangs von THC am 16. September 2008 durchquert der Satellit THE die Magnetopause um 19:30 UT. Zu diesem Zeitpunkt sind folglich Daten von zwei Raumfahrzeugen innerhalb der Magnetosheath vorhanden. Beide Raumfahrzeuge messen um 19:30 UT unter anderem die Dichte, die Geschwindigkeit, das Magnetfeld, den Gasdruck und die Raumfahrzeugposition bezüglich der Erde. Der Einfachheit halber wird anstatt der vollen Informationen der physikalischen Größen von THE lediglich die Position der Magnetopause in Betracht gezogen. Weiterhin wird wie zuvor das Sonnenwindplasma als kaltes Plasma betrachtet.

Der Magnetopausendurchgang wurde von THE um 19:30 UT bei  $x_{\text{SC}} = 11.20 R_E$ ,  $y_{\text{SC}} = -2.61 R_E$  und  $z_{\text{SC}} = -1.68 R_E$  beobachtet. Daraus ergibt sich ein gemessener subsolarer Magnetopausenabstand, analog zum subsolaren Bugstoßwellenabstand nach Gleichung (7.7), von  $\Delta x_{\text{MP}} = 11.57 R_E$  im Rahmen des Reihenentwicklungsmodells nullter Ordnung. Für verschiedene Dipolmomente  $M$  wurden die Sonnenwindbedingungen mit dem Reihenentwicklungsmodell nullter Ordnung rekonstruiert und die subsolare Magnetopausenlage in diesem Modell berechnet.

Die Ergebnisse für die geschätzte Sonnenwindgeschwindigkeit und die Lage der Magnetopause sind in Abbildung 8.10 zu sehen. Die rekonstruierte Sonnenwindgeschwindigkeit wird mit einem im Betrag steigenden Dipolmoment größer, was zu einem größeren dynamischen Sonnenwinddruck führt. Die Magnetopausenlage würde bei gleichbleibendem dynamischen Sonnenwinddruck für ein im Betrag größeres Dipolmoment nach Gleichung (4.103) zwar kleiner werden, jedoch überwiegt bei einer Änderung des Dipol-

moments hier der Einfluss des veränderten dynamischen Drucks. Daher verkleinert sich der Magnetopausenabstand im Modell  $\Delta x_{\text{MP}}$  für ein im Betrag größeres Dipolmoment. Für einen Wert von  $M = -1.085 m_{\text{norm}} = -8.8 \cdot 10^{15} \text{ T m}^3$  entspricht die Magnetopausenlage im Modell der von THE beobachteten. Für diesen Fall ergibt sich eine rekonstruierte Sonnenwindgeschwindigkeit von etwa  $v_{\text{SW}} = 521 \text{ km/s}$  und eine Teilchendichte von  $N_{\text{SW}} = 2.4 / \text{cm}^3$ . Die Abweichung vom geschätzten Dipolmoment zum Dipolmoment der Erde liegt dabei in der gleichen Größenordnung wie zuvor bei den Schätzungen über die Bugstoßwellenposition aus Kapitel 7. Die rekonstruierten Sonnenwindparameter weichen um weniger als 10% von den durch THB beobachteten Sonnenwindbedingungen ab.

Somit ist auch die simultane Schätzung von den planetaren Magnetfeld- und Sonnenwindparametern des Modells mit Messungen von zwei Raumfahrzeugen in der Magnetosheath möglich. Auf diese Weise können nicht nur Daten der BepiColombo-Mission zur Schätzung des planetaren Magnetfeldes verwendet werden, bei denen sich ein Raumfahrzeug im Sonnenwind befindet, sondern auch die Daten, bei denen sich beide Raumfahrzeuge innerhalb der Wechselwirkungsregion befinden.

## 9 Berechnung der Wechselwirkung mit einer Projektionsabbildung

Die Lösungen der in Kapitel 4 eingeführten Reihenentwicklungsmodelle für die Wechselwirkung des Sonnenwindes mit einem planetaren Magnetfeld lassen sich für kleine Entwicklungsordnungen im Vergleich zum MHD-Simulationscode aus Kapitel 2 schneller berechnen. Dadurch konnte auch eine Rekonstruktion von Sonnenwindparametern für eine gleichzeitige Schätzung der planetaren Magnetfeldparameter durchgeführt werden. Aufgrund der vernachlässigbaren numerischen Fehler im Reihenentwicklungsmodell nullter Ordnung ist der Grenzfall kleiner Diffusionsparameter in der Wechselwirkung mit diesem Modell nicht nur schneller, sondern auch genauer als mit dem MHD-Simulationscode berechenbar. Allerdings gibt das Reihenentwicklungsmodell in niedrigen Ordnungen die Lösung der Wechselwirkung neben der Stagnationslinie im Vergleich zum MHD-Simulationscode nur unzureichend wieder. Daher ließen sich mit dem Reihenentwicklungsmodell nullter Ordnung lediglich Daten nahe der Stagnationslinie zur Parameterschätzung verwenden.

In diesem Kapitel wird ein Verfahren präsentiert, das die Vorteile beider Modelle vereint, um möglichst effizient eine präzise Lösung im gesamten Wechselwirkungsgebiet zu berechnen. Dazu wird eine Projektionsabbildung eingeführt, die die Lösung einer MHD-Simulation zu typischen Sonnenwindbedingungen mit dem Reihenentwicklungsmodell nullter Ordnung in eine Lösung zu beliebigen Sonnenwindbedingungen überführt. Zum Testen der Projektionsabbildung wird diese zunächst so bestimmt, dass sich Ergebnisse einer MHD-Simulation zu beliebigen Sonnenwindbedingungen reproduzieren lassen. Anschließend erfolgt eine Korrektur der Abbildung gemäß der Fehlerquellen durch die zu großen Diffusionsparameter der MHD-Simulation.

Für die Berechnung einer Lösung mit der Projektionsabbildung zu beliebigen Sonnenwindbedingungen im gesamten Wechselwirkungsgebiet ist lediglich das Reihenentwicklungsmodell zu lösen, anstatt eine erneute MHD-Simulation durchzuführen. Daher können mit dieser Methode auch zeitaufwendige Schätzungen vieler Modellparameter, wie Sonnenwind-, Diffusions- und planetare Magnetfeldparameter, gleichzeitig mit Daten aus der gesamten Wechselwirkungsregion durchgeführt werden.

### 9.1 Bestimmung der Projektionsabbildung

In diesem Abschnitt wird eine Projektionsabbildung berechnet, die die Lösung einer MHD-Simulation zu beliebigen Sonnenwindbedingungen reproduzieren kann. Zunächst wird die Lösung der MHD-Simulation für typische Sonnenwindbedingungen, die Basislö-

sung, bestimmt. Diese Basislösung lässt sich über die Projektionsabbildung an neue Sonnenwindbedingungen anpassen. Dazu werden in einem ersten Schritt die physikalischen Größen in der Basislösung der MHD-Simulation auf die neuen Sonnenwindbedingungen angepasst. Dabei wird diese Basislösung skaliert mit der Veränderung der Lösung des Reihenentwicklungsmodells von den typischen Sonnenwindbedingungen hin zu den beliebigen Bedingungen. In einem zweiten Schritt wird die Geometrie der Basislösung der MHD-Simulation bezüglich der neuen Sonnenwindbedingungen modifiziert. Dazu ist die Veränderung der Geometrie in der Lösung des Reihenentwicklungsmodells bei Verwendung der neuen Sonnenwindbedingungen zu berechnen. Diese Veränderung kann dann auf die Basislösung der MHD-Simulation angewandt werden.

Für die Darstellung der Ergebnisse der Projektionsabbildung wird dasselbe Koordinatensystem wie für den MHD-Simulationscode verwendet, mit der  $x$ -Achse in Richtung des Sonnenwindes. Zunächst erfolgt die Berechnung einer Basislösung mit dem MHD-Simulationscode für die typischen Sonnenwindbedingungen bei der Erde nach Tabelle 1.1. Die zugehörigen Simulationseinstellungen sind im Anhang B.2 in Tabelle B.4 zu finden. Dabei konnte eine höhere räumliche Auflösung als bei den Simulationen zur Parameterschätzung gewählt werden, weil für die Projektionsabbildung lediglich eine einzige MHD-Simulation zu konstanten Sonnenwindbedingungen durchzuführen ist. Für die Simulation wird ein planetares Magnetfeld, welches nur eine Dipolkomponente in  $z$ -Richtung besitzt, verwendet. Der Vektor des planetaren Magnetfeldes ist  $\vec{s} = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)^T m_{\text{norm}}$ . Die Basislösung für die physikalischen Größen im MHD-Simulationscode wird mit  $u_s^n(x, y, z)$  bezeichnet, wobei der Index  $n$  die physikalischen Größen  $\rho, v_x, v_y, v_z, p, B_x, B_y, B_z$  referenziert. Dabei gibt  $u_s^n(x) := u_s^n(x, 0, 0)$  die Lösung entlang der  $x$ -Achse an.

Von der berechneten Basislösung muss als Erstes die Geometrie der Magnetosheath bestimmt werden. Eine tangentielle Strömungsgeschwindigkeit ausgehend von einem Stagnationspunkt bestimmt die Lage der Magnetopause. Die Bugstoßwelle in der MHD-Simulation bei der Erde lässt sich anhand des starken Anstiegs im Gasdruck bestimmen. Das erste Auftreten eines Druckanstiegs um mehr als einen Faktor 5 im Vergleich zum Sonnenwindgasdruck identifiziert die Bugstoßwellenposition. Die Magnetopausenposition in der Basislösung der MHD-Simulation wird mit  $x_{\text{MP,S}}(y, z)$  und die Bugstoßwellenposition mit  $x_{\text{BS,S}}(y, z)$  bezeichnet. Die Abkürzung  $x_{\text{MP,S}} := x_{\text{MP,S}}(0, 0)$  definiert die Magnetopausenposition und  $x_{\text{BS,S}} := x_{\text{BS,S}}(0, 0)$  die Bugstoßwellenposition entlang der  $x$ -Achse.

Die Basislösung der MHD-Simulation wird mit der zugehörigen Basislösung eines Reihenentwicklungsmodells zu denselben Sonnenwindbedingungen nach Tabelle 1.1 verglichen. Dabei findet hier das Reihenentwicklungsmodell der nullten Ordnung Verwendung. Es wird in Übereinstimmung mit der MHD-Simulation ein planetares Magnetfeld von  $M = 1.0 m_{\text{norm}} = 8.07 \cdot 10^{15} \text{ T m}^3$  genutzt. Die Berechnung einer Lösung mit dem Reihenentwicklungsmodell für bestimmte Sonnenwindbedingungen und ein festgelegtes Dipolfeld ist in Kapitel 4.3 dargestellt. Die Ergebnisse für typische Sonnenwindbedingungen für die MHD-Simulation und das Reihenentwicklungsmodell nullter Ordnung sind in Abbildung 9.1 zu sehen. Die Basislösung des Reihenentwicklungsmodells ist  $u_R^n(x, y, z)$ , wobei hier nur die Lösung auf der  $x$ -Achse  $u_R^n(x)$  betrachtet wird. Weiterhin wird der Bugstoßwellenabstand und der Magnetopausenabstand zur Erde entlang der  $x$ -Achse mit  $x_{\text{BS,R}}$  beziehungsweise mit  $x_{\text{MP,R}}$  bezeichnet.

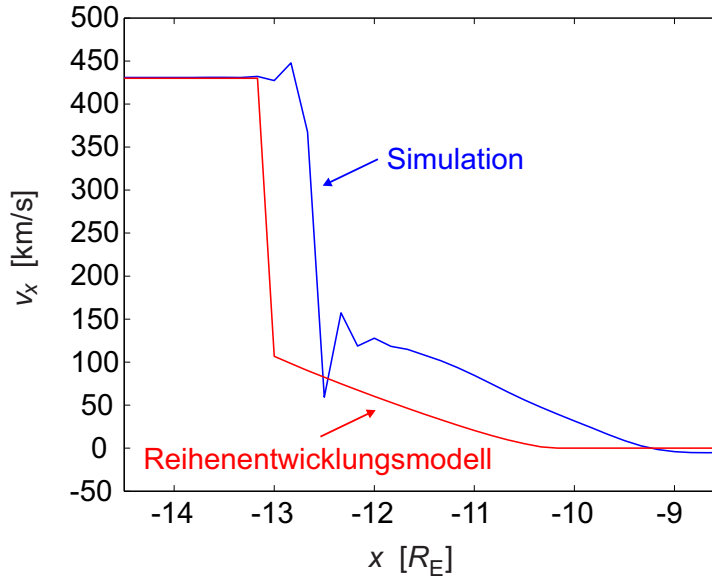


Abbildung 9.1: Betrag der Geschwindigkeit im stationären Zustand für die Basislösung der MHD-Simulation und des Reihenentwicklungsmodells nullter Ordnung mit  $v_{\text{SW}} = 430 \text{ km/s}$ .

Um die Werte der physikalischen Größen aus zwei Lösungen, wie die Basislösungen des Reihenentwicklungsmodells und des MHD-Simulationscodes, miteinander vergleichen zu können, müssen die unterschiedlichen Geometrien der Lösungen berücksichtigt werden. Dazu erfolgt ein Vergleich der Werte an Orten, die die gleiche Entfernung zur Bugstoßwelle im Verhältnis zur Dicke der Magnetosheath besitzen. Dieses Verhältnis lässt sich bezüglich einer Magnetosheathgeometrie mit einem Bugstoßwellenabstand  $x_{\text{BS}}$  und einem Magnetopausenabstand  $x_{\text{MP}}$  über

$$P_{\text{MS}}(x, x_{\text{BS}}, x_{\text{MP}}) = \frac{x_{\text{BS}} - x}{x_{\text{MP}} - x_{\text{MP}}} \quad (9.1)$$

berechnen. Für Werte  $x_{\text{BS}} \geq x \geq x_{\text{MP}}$  gilt  $1 \geq P_{\text{MS}}(x, x_{\text{BS}}, x_{\text{MP}}) \geq 0$ , wobei der Faktor an der Bugstoßwelle  $P_{\text{MS}}(x = x_{\text{BS}}, x_{\text{BS}}, x_{\text{MP}}) = 0$  und an der Magnetopause  $P_{\text{MS}}(x = x_{\text{MP}}, x_{\text{BS}}, x_{\text{MP}}) = 1$  ist (siehe Abb. 9.2). Über die Koordinate

$$x_{\text{R/S}}(x) = x_{\text{BS,R}} - P_{\text{MS}}(x, x_{\text{BS,S}}, x_{\text{MP,S}}) (x_{\text{BS,R}} - x_{\text{MP,R}}) \quad (9.2)$$

wird ein Ort  $x$  aus der Basislösung der MHD-Simulation in die Geometrie der Basislösung des Reihenentwicklungsmodells übertragen. Dabei ist die Koordinate an der Bugstoßwelle  $x_{\text{R/S}}(x = x_{\text{BS,S}}) = x_{\text{BS,R}}$  und an der Magnetopause  $x_{\text{R/S}}(x = x_{\text{MP,S}}) = x_{\text{MP,R}}$ . Die Koordinate durchläuft für  $x_{\text{BS,S}} \geq x \geq x_{\text{MP,S}}$  die Werte  $x_{\text{BS,R}} \geq x_{\text{R/S}}(x) \geq x_{\text{MP,R}}$  und die Geometrien werden aufeinander abgebildet (siehe Abb. 9.2). Damit lässt sich das Verhältnis der physikalischen Größen aus den Basislösungen des Reihenentwicklungsmodells und der MHD-Simulation in der Magnetosheath bei gleichen Werten für  $P_{\text{MS}}$  durch

$$f_{\text{korR}}^n(x) = \frac{u_{\text{R}}^n(x_{\text{R/S}}(x))}{u_{\text{S}}^n(x)} \quad \text{für } x_{\text{BS,S}} \geq x \geq x_{\text{MP,S}} \quad (9.3)$$

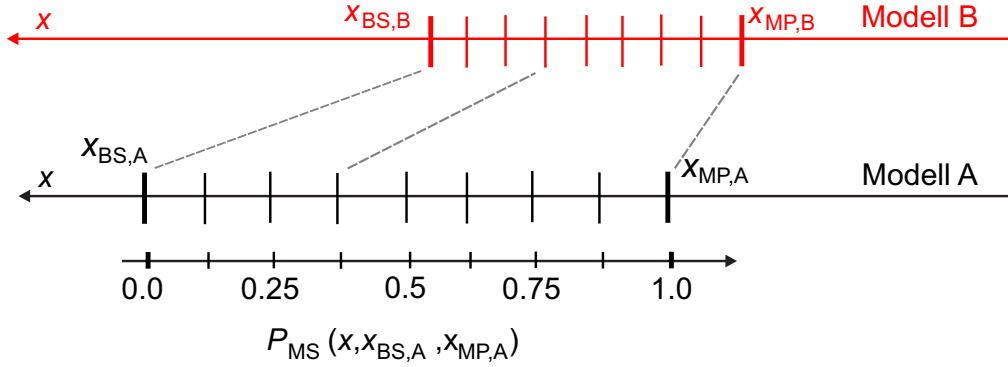


Abbildung 9.2: Die Funktion  $P_{MS}(x, x_{BS}, x_{MP})$  beschreibt das Verhältnis des Bugstoßwellenabstandes eines Punktes  $x$  zu der Dicke der Magnetosheath. Die grauen, gestrichelten Linien deuten an, wie die Geometrie von der Lösung eines Modells A (z. B. die Basislösung der MHD-Simulation, wobei dann 'A' → 'S') auf die Lösung eines Modells B (z. B. die Basislösung des Reihenentwicklungsmodells, wobei dann 'B' → 'R') projiziert wird. Dazu wird eine Koordinate eingeführt, wie beispielsweise in Gleichung (9.2), die Punkte mit gleichem Wert für  $P_{MS}(x, x_{BS}, x_{MP})$  aufeinander abbildet.

berechnen.

Um die MHD-Lösung für neue Sonnenwindbedingungen mit einer Projektionsabbildung zu berechnen, wird zunächst das Reihenentwicklungsmodell bezüglich dieser auf der  $x$ -Achse gelöst, was die Lösung  $u_{RSW}^n(x)$  ergibt. Es ergibt sich dabei ein Bugstoßwellenabstand  $x_{BS,RSW}$  und ein Magnetopausenabstand  $x_{MP,RSW}$ . Die Lösung wird für die neuen Sonnenwindbedingungen mit den Korrekturfaktoren  $f_{korR}^n(x)$  skaliert, um die Abweichungen zwischen den Basislösungen zu berücksichtigen.

Die Koordinate der Faktoren ist gemäß der Geometrie der neuen Lösung des Reihenentwicklungsmodells  $u_{RSW}^n(x)$  anzupassen, weil der Korrekturfaktor bezüglich der Geometrie der Basislösung der MHD-Simulation bestimmt wurde. Dazu wird die Koordinate

$$x_{S/RSW}(x) = x_{BS,S} - P_{MS}(x, x_{BS,RSW}, x_{MP,RSW}) (x_{BS,S} - x_{MP,S}) \quad (9.4)$$

verwendet. Sie ergibt für  $x_{S/RSW}(x = x_{BS,RSW}) = x_{BS,S}$  und für  $x_{S/RSW}(x = x_{MP,RSW}) = x_{MP,S}$ . Damit bildet die Koordinate  $x_{S/RSW}(x)$  die Geometrie der neuen Lösung des Reihenentwicklungsmodells  $u_{RSW}^n(x)$  und die Geometrie der Basislösung der MHD-Simulation aufeinander ab. Dann kann die Lösung des Reihenentwicklungsmodells  $u_{RSW}^n(x)$  mit den Korrekturfaktoren  $f_{korR}^n(x)$  wie folgt skaliert werden:

$$u_{RSW,korr}^n(x) = \frac{u_{RSW}^n(x)}{f_{korR}^n(x_{S/RSW}(x))} \quad \text{für } x_{BS,RSW} \geq x \geq x_{MP,RSW}. \quad (9.5)$$

Die Lösung  $u_{RSW,korr}^n(x)$  ist dann in einem Maße korrigiert, wie sich die Basislösungen der MHD-Simulation und des Reihenentwicklungsmodells voneinander unterscheiden (vergleiche Abb. 9.1).

Die so modifizierte Lösung  $u_{RSW,korr}^n(x)$  kann genutzt werden, um die physikalischen Größen in der Basislösung der MHD-Simulation bezüglich der neuen Sonnenwindbedingungen anzupassen, ohne eine erneute MHD-Simulation durchzuführen. Dabei sind



zunächst die physikalischen Größen zu skalieren und anschließend, in einem weiteren Schritt, die Geometrie der Magnetosheathregion anzupassen. Die Berechnung des Skalierungsfaktors ist analog zu Gleichung (9.3), nur das anstatt der Basislösung des Reihenentwicklungsmodells nun die neue Lösung  $u_{\text{RSW,korr}}^n(x)$  verwendet wird. Dann ergibt sich der Korrekturfaktor als Verhältnis zwischen dieser Lösung des Reihenentwicklungsmodells zu der Basislösung der MHD-Simulation:

$$f_{\text{RSW,korr}}^n(x) = \frac{u_{\text{RSW,korr}}^n(x_{\text{RSW/S}}(x))}{u_{\text{S}}^n(x)} \quad \text{für } x_{\text{BS,S}} \geq x \geq x_{\text{MP,S}}. \quad (9.6)$$

Dabei wurde durch

$$x_{\text{RSW/S}}(x) = x_{\text{BS,RSW}} - P_{\text{MS}}(x, x_{\text{BS,S}}, x_{\text{MP,S}}) (x_{\text{BS,RSW}} - x_{\text{MP,RSW}}) \quad (9.7)$$

die Koordinate für die Basislösung der MHD-Simulation auf die Lösung des Reihenentwicklungsmodells abgebildet.

Der Faktor  $f_{\text{RSW,korr}}^n(x)$  ist entlang der  $x$ -Achse bestimmt. Um die MHD-Basislösung im gesamten Simulationsgebiet mit dem Faktor  $f_{\text{RSW,korr}}^n(x)$  zu skalieren, muss die Koordinate des Faktors an die Dicke der Magnetosheath neben der  $x$ -Achse angepasst werden. Die Dicke der Magnetosheath als Funktion von  $y$  und  $z$  wird als Abstand zwischen Bugstoßwelle und Magnetopause entlang der  $x$ -Richtung definiert. Um die Magnetosheathgeometrie der Simulation neben der  $x$ -Achse auf die Geometrie auf der  $x$ -Achse abzubilden, nutzt man die Koordinate

$$x_{\text{RSW/S,yz}}(x, y, z) = x_{\text{BS,S}} - P_{\text{MS}}(x, x_{\text{BS,S}}(y, z), x_{\text{MP,S}}(y, z)) (x_{\text{BS,S}} - x_{\text{MP,S}}). \quad (9.8)$$

Damit können die Faktoren (9.6) für eine Skalierung der Werte der physikalischen Größen in der MHD-Basislösung im gesamten Simulationsgebiet genutzt werden:

$$u_{\text{S,skal}}^n(x, y, z) = f_{\text{RSW,korr}}^n(x_{\text{RSW/S,yz}}(x, y, z)) u_{\text{S}}^n(x, y, z) \quad \text{für } x_{\text{BS,S}}(y, z) \geq x \geq x_{\text{MP,S}}(y, z). \quad (9.9)$$

Diese Transformation funktioniert für die physikalischen Größen  $\rho$ ,  $v_x$ ,  $p$  und  $B_z$ . Für  $v_y$ ,  $v_z$  wird der Skalierungsfaktor von  $v_x$  und für  $B_x$  und  $B_y$  wird der Skalierungsfaktor von  $B_z$  verwendet. Möglich wäre auch, Skalierungsfaktoren unabhängig über die Betrachtung der Koeffizienten  $v_{y10}$ ,  $v_{z01}$  und  $B_{x01}$  zu bestimmen. Neben den Modifikationen der Werte in der Magnetosheath werden die Werte vor der Bugstoßwelle, also für  $x > x_{\text{BS,S}}(y, z)$  durch die neuen Sonnenwindbedingungen ersetzt.

Die physikalischen Größen sind auf die neuen Sonnenwindbedingungen angepasst, jedoch in der Geometrie der Basislösung der MHD-Simulation. Daher wird eine Skalierung der Lösung in  $x$ -Richtung gemäß der Veränderung der Lösung des Reihenentwicklungsmodells vorgenommen. Dazu wird eine Verschiebung  $b_{\text{R}}$  benötigt, die die unterschiedlichen Positionen der Magnetopause im Reihenentwicklungsmodell bezüglich der veränderten Sonnenwindbedingungen berücksichtigt:

$$b_{\text{R}} = (x_{\text{MP,RSW}} - x_{\text{MP,R}}) k_{\text{SR}}. \quad (9.10)$$

Dabei berücksichtigt das Verhältnis  $k_{\text{SR}} := x_{\text{MP,S}}/x_{\text{MP,R}}$  die Differenz der Magnetopausenabstände im Reihenentwicklungsmodell und in der Simulation für gleiche Sonnenwindbedingungen. Neben der Verschiebung der Magnetopause muss noch die Veränderung

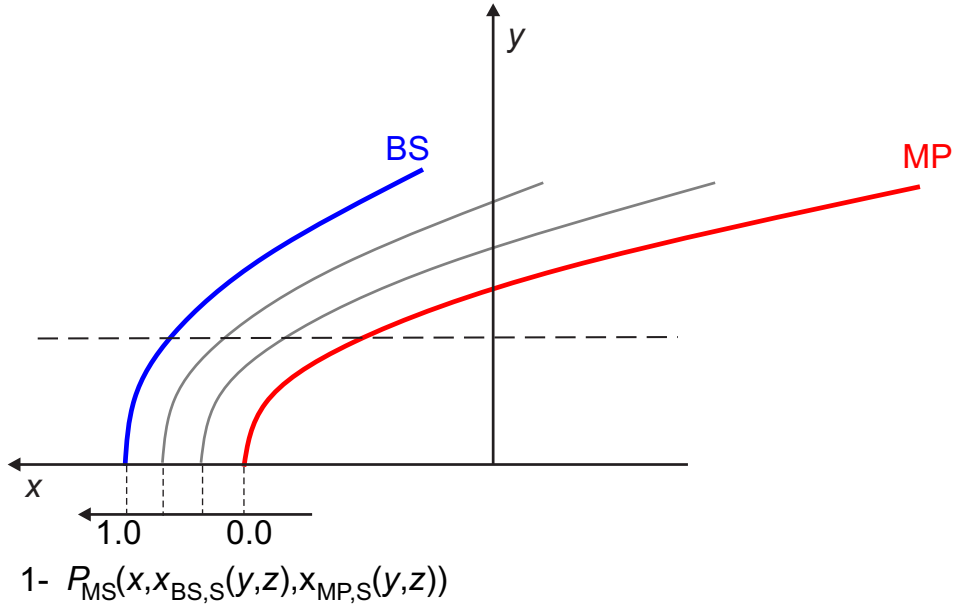


Abbildung 9.3: Das Verhältnis (9.1) nutzt die Bugstoßwelle als Referenzfläche. Das Verhältnis  $(1 - P_{MS}(x, x_{BS,S}(y, z), x_{MP,S}(y, z)))$  hingegen bezieht die Magnetopausenlage als Referenzpunkt ein. Damit beschreibt das Verhältnis den Abstand eines Punktes  $x$  für verschiedene  $y$  und  $z$  von der Magnetopause entlang der  $x$ -Richtung in Bezug zur dortigen Dicke der Magnetosheath.

der Magnetosheath aufgrund der veränderten Sonnenwindbedingungen betrachtet werden. Der prozentuale Anteil dieser Veränderung ist durch

$$p_R = \frac{((x_{BS,RSW} - x_{MP,RSW}) - (x_{BS,R} - x_{MP,R})) k_{SR}}{x_{BS,R} - x_{MP,R}} \quad (9.11)$$

gegeben, wobei der Bruch die Veränderung der Magnetosheathdicke betrachtet. Diese veränderte Längenskala wird wieder mit  $k_{SR}$  korrigiert. Damit lässt sich die Veränderung der Magnetosheathdicke auf der  $x$ -Achse für die Basislösung der MHD-Simulation durch

$$v_{MS,SSW} = p_R (x_{BS,S} - x_{MP,S}) \quad (9.12)$$

abschätzen.

Mit  $b_R$  wird die Verschiebung der Magnetopausenposition aufgrund der veränderten Sonnenwindbedingungen berücksichtigt. Das Verhältnis  $P_{MS}(x, x_{BS,S}(y, z), x_{MP,S}(y, z))$  nutzte die Bugstoßwelle als Referenzpunkt. Mit  $(1 - P_{MS}(x, x_{BS,S}(y, z), x_{MP,S}(y, z)))$  ist es auch möglich, die Magnetopause als Referenzpunkt zu nutzen. Damit lässt sich ein Term  $v_{MS,SSW} (1 - P_{MS}(x, x_{BS,S}(y, z), x_{MP,S}(y, z)))$  konstruieren, der einen neuen Abstand eines Punktes  $x$  zur Magnetopause für alle  $y$  und  $z$  aufgrund der veränderten Magnetosheathdicke durch die neuen Sonnenwindbedingungen angibt (siehe Abb. 9.3). Dann kann eine lineare Transformation für eine Verzerrung der MHD-Basislösung im gesamten Simulationsgebiet der Magnetosheath formuliert werden durch

$$x_{S/SSW}(x, y, z) = v_{MS,SSW} (1 - P_{MS}(x, x_{BS,S}(y, z), x_{MP,S}(y, z))) + b_R + x. \quad (9.13)$$

Mit der Koordinate  $x_{S/SSW}(x, y, z)$  lässt sich die MHD-Simulation  $u_{S,skal}^n(x, y, z)$  bezüglich der Geometrie für die neuen Sonnenwindbedingungen anpassen:

$$u_{S,xtraf}^n(x_{S/SSW}(x, y, z), y, z) = u_{S,skal}^n(x, y, z) \quad \text{für } x_{BS,S}(y, z) \geq x \geq x_{MP,S}(y, z) \quad (9.14)$$

Sonnenwärts der Bugstoßwelle wird  $u_{S,xtraf}^n(x_{S/SSW}(x, y, z), y, z)$  auf die veränderten Sonnenwindbedingungen gesetzt.

Die vollständige Lösung zu den neuen Sonnenwindbedingungen bezüglich der kartesischen Koordinaten wird mit  $u_{SW}^n(x, y, z) = u_{S,xtraf}^n(x_{S/SSW}(x, y, z), y, z)$  bezeichnet. Die beschriebene Abbildungsvorschrift, die aus der Basislösung der MHD-Simulation mit der Lösung des Reihenentwicklungsmodells zu den neuen Sonnenwindbedingungen  $u_{RSW}^n(x)$  die neue Lösung  $u_{SW}^n(x, y, z)$  berechnet, ist die Projektionsabbildung.

Analog zu Änderungen von Sonnenwindbedingungen können auch Änderungen des planetaren Magnetfeldes über die Projektionsabbildung miteinbezogen werden. Beispielsweise kann so die zeitliche Änderung des Magnetfeldes bei einer Verkipfung des Dipolmoments gegenüber der Rotationsachse des Planeten berücksichtigt werden. Auch eine Variation des planetaren Magnetfeldes im Rahmen einer Schätzung der planetaren Magnetfeldparameter kann berechnet werden. Bei größeren Änderungen des planetaren Magnetfeldes ist es jedoch besser, eine neue Basislösung zu berechnen.

## 9.2 Vergleich zum MHD-Simulationscode

Die Projektionsabbildung im vorherigen Abschnitt 9.1 wurde derart konstruiert, dass die Lösung  $u_{SW}^n(x, y, z)$  eine MHD-Simulation mit entsprechenden Sonnenwindbedingungen reproduzieren kann. Um die Qualität der Lösung  $u_{SW}^n(x, y, z)$  zu beurteilen, wird sie mit der Lösung einer MHD-Simulation für dieselben Sonnenwindbedingungen verglichen. Dabei sind die Sonnenwindbedingungen so gewählt, dass sie sich von den Sonnenwindbedingungen der Basislösung nach Tabelle 1.1 signifikant unterscheiden. Exemplarisch wird im Folgenden die Lösung bezüglich einer um 100 km/s verminderten Geschwindigkeit bezüglich der Sonnenwindgeschwindigkeit der Basislösung betrachtet. Der Betrag der Geschwindigkeit der Basislösung des MHD-Simulationscodes in der  $xy$ -Ebene ist in Abbildung 9.4 dargestellt. Des Weiteren ist die Lösung über das Reihenentwicklungsmodell mit der Projektionsabbildung  $u_{SW}^n(x, y, z)$  für den Betrag der Geschwindigkeit zu sehen. Zum Vergleich wurde die zugehörige Geschwindigkeitsverteilung für eine MHD-Simulation mit den entsprechenden Sonnenwindbedingungen dargestellt.

Die Magnetosheath befindet sich aufgrund des höheren dynamischen Drucks in der Basislösung mit  $p_{dyn} = 2.16 \text{ nPa}$  weiter erdwärts als für 330 km/s mit  $p_{dyn} = 1.27 \text{ nPa}$ . Dieser Umstand wird von der über die Projektionsabbildung bestimmten Lösung gut reproduziert. Weiterhin ändert sich auch die Geschwindigkeitsverteilung wegen der veränderten Sonnenwindgeschwindigkeit. Bei einem Vergleich zwischen den Berechnungen über die Projektionsabbildung und der Lösung des Simulationscodes zu den neuen Sonnenwindbedingungen ist zu erkennen, dass die Geschwindigkeit in der Magnetosheath in beiden Lösungen gut übereinstimmt und deutlich kleiner ist als in der Basislösung. Einzig nahe der Magnetopause auf der Nachtseite der Magnetosheath ist der Betrag der Geschwindigkeit kleiner als in der MHD-Simulation. Das ist auf das zu kleine Simulationsgebiet der MHD-Basislösung für eine Berechnung mit der Projektionsabbildung in

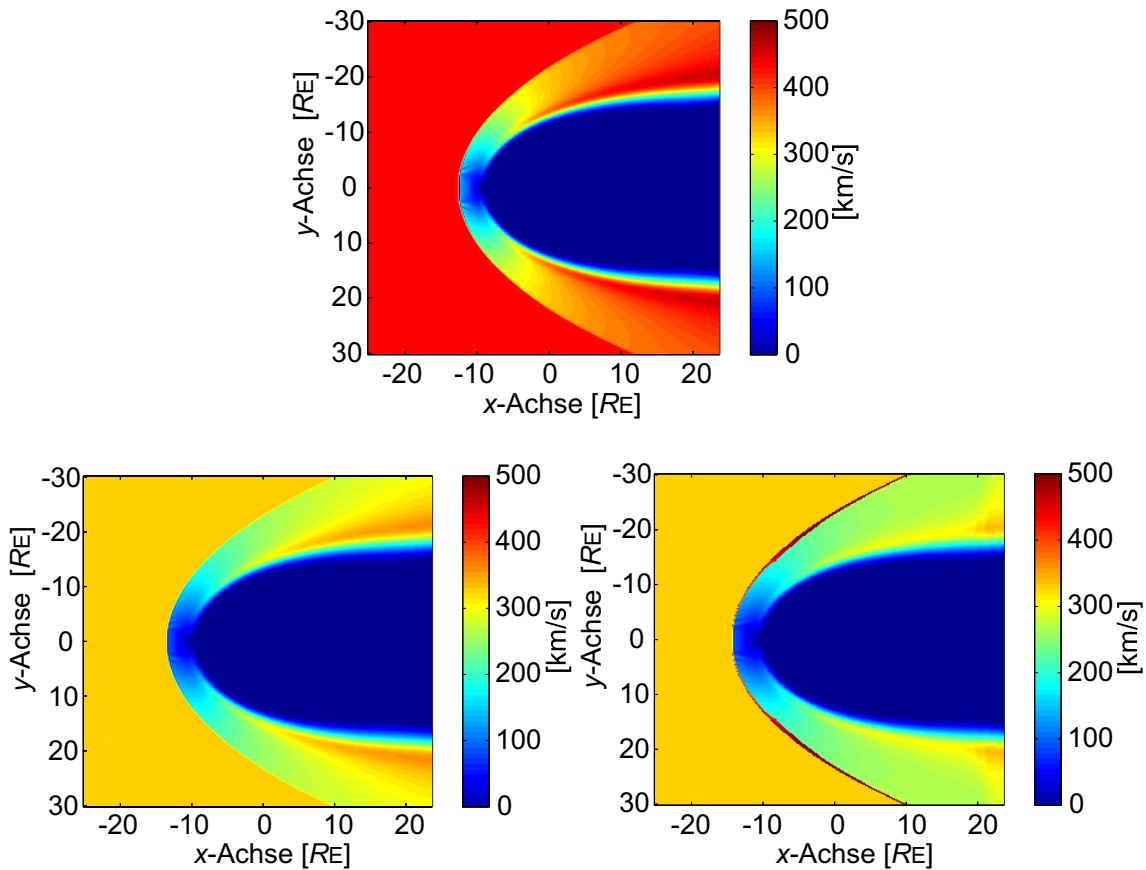


Abbildung 9.4: Betrag der Geschwindigkeit im stationären Zustand für die Basislösung der MHD-Simulation mit  $v_{\text{SW}} = 430 \text{ km/s}$  (oben). Mit dem Reihenentwicklungsmodell wird für  $v_{\text{SW}} = 330 \text{ km/s}$  eine Lösung berechnet und mithilfe der Projektionsabbildung skaliert. Die sich ergebende Lösung (unten rechts) wird verglichen mit der Lösung des MHD-Simulationscodes für  $v_{\text{SW}} = 330 \text{ km/s}$  (unten links).

dieser Region zurückzuführen. Um diesen Randeffekt zu vermeiden, kann das Simulationsgebiet in  $x$ -Richtung weiter ausgedehnt werden. In der Lösung über die Projektionsabbildung gibt es, anders als in der MHD-Simulation, an den Flanken der Bugstoßwelle eine stark erhöhte Geschwindigkeit. Diese tritt aufgrund der numerischen Fehler der Basislösung nahe der subsolaren Bugstoßwelle auf. Die dortigen Oszillationen übertragen sich durch die Projektion auf die Bereiche neben der  $x$ -Achse. Allerdings ist der räumliche Bereich dieses Fehlers beschränkt auf die Bugstoßwellenregion.

In Abbildung 9.5 ist ein detaillierter Vergleich des Betrages der Geschwindigkeit zwischen der Lösung der MHD-Simulation und der Projektionslösung entlang zur  $x$ -Achse paralleler Geraden zu sehen. Die Basislösung ist ebenfalls dargestellt, um die Unterschiede besser beurteilen zu können. Abgesehen von der erhöhten Geschwindigkeit nahe der Bugstoßwelle, liegen die Lösungen von Projektionsabbildung und MHD-Simulationscode für  $330 \text{ km/s}$  bei  $y = 10 R_E$  sehr gut übereinander. Auch bei  $y = 15 R_E$  neben der Stagnationslinie stimmt die Projektionslösung mit der MHD-Simulation noch gut überein. Lediglich auf der Nachtseite gibt es Abweichungen, welche jedoch klein im Vergleich zur Änderung aufgrund der veränderten Sonnenwindgeschwindigkeit sind. Für die Projekti-

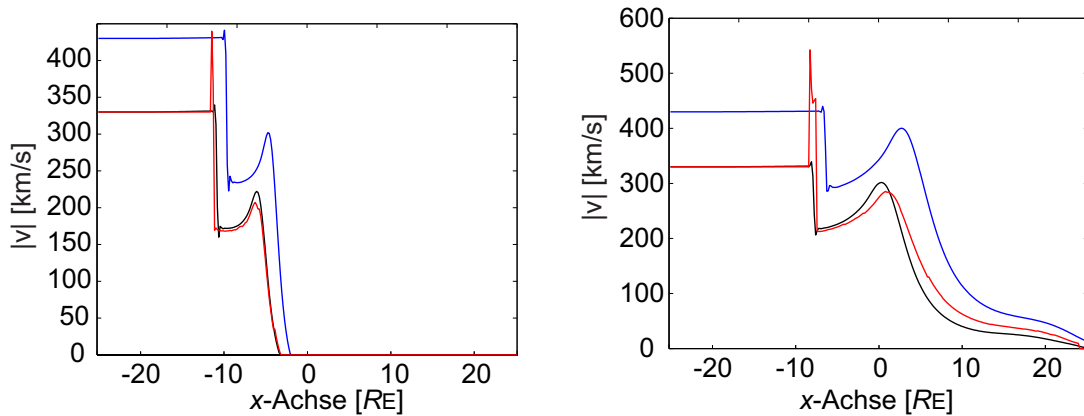


Abbildung 9.5: Vergleich von der Lösung der MHD-Simulation (schwarz) und der Projektionslösung (rot) in der  $xy$ -Ebene für  $y = 10 R_E$  (links) und für  $y = 15 R_E$  (rechts) für eine Sonnenwindgeschwindigkeit von 330 km/s. Dabei wurde auch die Basislösung der MHD-Simulation für eine mittlere Sonnenwindgeschwindigkeit von 430 km/s eingezeichnet.

onsabbildung wurde das Reihenentwicklungsmodell niedrigster Ordnung verwendet, das schon einige Erdradien neben der Stagnationslinie seine Gültigkeit verliert (siehe Kap. 4.1). Trotzdem lässt sich mit dieser Abbildung eine Lösung berechnen, die auch weit neben der Stagnationslinie noch gültig ist.

### 9.3 Korrekturen aufgrund von Diffusionsparametern

Die Projektionsabbildung wurde in Abschnitt 9.1 konstruiert, sodass sie die Lösungen des MHD-Simulationscodes reproduziert. Allerdings stellte sich in Kapitel 4.6 schon heraus, dass die Lösung des Reihenentwicklungsmodells für die Situation bei der Erde nahe der Stagnationslinie die bessere Lösung liefert. Um dies in der Projektionsabbildung zu berücksichtigen, werden die Transformationen aus Abschnitt 9.1 modifiziert.

In einem ersten Schritt wurde die Lösung des Reihenentwicklungsmodells  $u_{\text{RSW}}^n(x)$  über Gleichung (9.5) bezüglich der Unterschiede in den Basislösungen beider Modelle korrigiert. Geht man davon aus, dass die physikalischen Werte der Basislösung des Reihenentwicklungsmodells besser sind als die der entsprechenden MHD-Simulation, fällt diese Korrektur weg. Dann sind  $u_{\text{RSW,korr}}^n(x)$  und  $u_{\text{RSW}}^n(x)$  identisch und es ergibt sich ein neuer Korrekturfaktor für die physikalischen Größen aufgrund der neuen Sonnenwindbedingungen aus Gleichung (9.6) über

$$\tilde{f}_{\text{RSW,korr}}^n(x) = \frac{u_{\text{RSW}}^n(x_{\text{RSW/S}}(x))}{u_{\text{S}}^n(x)} \quad \text{für } x_{\text{BS,S}} \geq x \geq x_{\text{MP,S}}. \quad (9.15)$$

Damit lässt sich die Basislösung entsprechend der Lösung des Reihenentwicklungsmodells mit den neuen Sonnenwindbedingungen durch

$$\tilde{u}_{\text{S,skal}}^n(x, y, z) = \tilde{f}_{\text{RSW,korr}}^n(x_{\text{RSW/S,yz}}(x, y, z)) u_{\text{S}}^n(x, y, z) \quad \text{für } x_{\text{BS,S}}(y, z) \geq x \geq x_{\text{MP,S}}(y, z) \quad (9.16)$$

skalieren.

Ist die Geometrie des Reihenentwicklungsmodells auf der Stagnationslinie besser für die Daten geeignet als die Geometrie der MHD-Simulation, müssen die Transformationen der Geometrie aus Kapitel 9.1 ebenfalls modifiziert werden. Die Anpassung der Magnetopausenposition erfordert neben dem Beitrag nach Gleichung (9.10) für die Verschiebung der Magnetopause noch einen weiteren Beitrag für den Unterschied der Magnetopausenpositionen zwischen den Basislösungen beider Modelle. Weiterhin entfällt die Korrektur durch den Faktor  $k_{SR}$ , sodass dieser Eins ist. Damit ergibt sich eine Magnetopausenverschiebung  $\tilde{b}_R$  durch

$$\tilde{b}_R = (x_{MP,RSW} - x_{MP,R}) + (x_{MP,R} - x_{MP,S}). \quad (9.17)$$

Analog fällt auch der Korrekturterm  $k_{SR}$  in der Bestimmung der Änderung der Magnetosheathdicke in Gleichung (9.11) weg:

$$\tilde{p}_R = \frac{(x_{BS,RSW} - x_{MP,RSW}) - (x_{BS,R} - x_{MP,R})}{x_{BS,R} - x_{MP,R}}. \quad (9.18)$$

Als Referenzlänge für die Anpassung der Magnetosheathgeometrie über Gleichung (9.12) wird nicht mehr die Basislösung der MHD-Simulation, sondern die Basislösung des Reihenentwicklungsmodells verwendet:

$$\tilde{v}_{MS,SSW} = \tilde{p}_R (x_{BS,R} - x_{MP,R}). \quad (9.19)$$

Damit ergibt sich die modifizierte lineare Transformation (9.13) zu

$$\tilde{x}_{S/SSW}(x, y, z) = \tilde{v}_{MS,SSW} (1 - P_{MS}(x, x_{BS,S}(y, z), x_{MP,S}(y, z))) + \tilde{b}_R + x. \quad (9.20)$$

Wird die Lösung des Reihenentwicklungsmodells nullter Ordnung als korrekte Lösung angenommen, sind die physikalischen Größen der Basislösung der MHD-Simulation mit  $\tilde{u}_{S,skal}^n(x, y, z)$  nach Gleichung (9.16) zu skalieren. Die Geometrie muss dann über Gleichung (9.20) angepasst werden, sodass die Lösung mit der Projektionsabbildung bezüglich der neuen Sonnenwindbedingungen

$$u_{S,xtraf}^n(\tilde{x}_{S/SSW}(x, y, z), y, z) = \tilde{u}_{S,skal}^n(x, y, z) \quad \text{für } x_{BS,S}(y, z) \geq x \geq x_{MP,S}(y, z) \quad (9.21)$$

ist.

Wie zuvor in Kapitel 9.2 gezeigt, erweitert sich über die Projektionsabbildung die Gültigkeit des Reihenentwicklungsmodells nullter Ordnung bis weit neben die Stagnationslinie. Bei den Berechnungen benötigt der Projektionscode aber nur ein Bruchteil der Laufzeit einer MHD-Simulation. Auf dem Testrechner PC-T (siehe Kap. 3.3) ist die Berechnung über die Projektionsabbildung etwa  $10^6$  Mal schneller als die MHD-Simulation. Es sei bemerkt, dass zu Vergleichszwecken für beide Berechnungen keine Parallelisierungen der Codes verwendet wurden.

## 9.4 Verallgemeinerungen

Für die Bestimmung der Projektionsabbildung in den Kapiteln 9.1 und 9.3 wurde das Reihenentwicklungsmodell nullter Ordnung verwendet. Die über die Projektionsabbildung

berechnete Lösung lässt sich durch die Verwendung eines Reihenentwicklungsmodells höherer Ordnung weiter verbessern. Damit kann unter anderem die Geometrie der Basislösung der MHD-Simulation in dem hier verwendeten Koordinatensystem, neben der bisher verwendeten Skalierung in  $x$ -Richtung, auch bezüglich der  $y$ - und  $z$ -Richtungen skaliert werden. Weiterhin wurden mit dem Reihenentwicklungsmodell bisher ausschließlich Sonnenwindströmungen senkrecht zu einem planetaren Dipolmoment mit einem Sonnenwindmagnetfeld antiparallel zu diesem Dipolmoment betrachtet. Diese Einschränkungen führten auf die Symmetrierelationen aus Tabelle 4.1, die die Reihenentwicklung der physikalischen Größen (4.8) vereinfachten. Es lassen sich auch beliebige Sonnenwindbedingungen berücksichtigen, indem die allgemeine Reihenentwicklung (4.8) zur Ableitung der gewöhnlichen Differenzialgleichungen des Reihenentwicklungsmodells verwendet wird. Dabei muss ebenfalls die allgemeine Parametrisierung der Bugstoßwelle (4.17) und der Magnetopause (4.18) verwendet werden. Für den allgemeineren Fall ist es dann auch möglich über die Berücksichtigung höherer Multipolordnungen ein beliebiges planetares Magnetfeld zu berücksichtigen, indem das planetare Magnetfeld (4.5)–(4.7) entsprechend modifiziert wird. Bemerkt sei, dass die Stagnationslinie dann nicht mehr zwangsweise entlang der  $x$ -Achse, der Richtung des Sonnenwindgeschwindigkeitsvektors, liegt.

Eine weitere Möglichkeit die Projektionsabbildung zu verbessern ist die Verwendung von mehr als einer Basislösung. Bisher wurde nur eine Basislösung zu typischen Sonnenwindbedingungen genutzt. Wie jedoch in Kapitel 5.4 diskutiert wurde, hat ein südwärtiges Sonnenwindmagnetfeld einen großen Einfluss auf die Lage der Magnetopause. Daher ist es sinnvoll unterschiedliche Basislösungen für nordwärtiges und für südwärtiges Sonnenwindmagnetfeld zu verwenden. Je nach Sonnenwindmagnetfeld könnte eine Projektionsabbildung für nordwärtiges oder für südwärtiges Sonnenwindmagnetfeld Anwendung finden. Dabei kann auch die Basislösung der MHD-Simulation durch die Verwendung einer höheren räumlichen Auflösung verbessert werden.

In dieser Arbeit beschränkt sich die Beschreibung der Wechselwirkung auf die MHD-Näherung. Es ist jedoch denkbar, für die Berechnung der Basislösung eine Simulation zu verwenden, die Effekte auf räumlichen Skalen unterhalb der Gyroskala berücksichtigt. Beispielsweise lässt sich anstatt einer MHD-Näherung in der Basislösung auch eine Simulation im Rahmen einer Mehrflüssigkeitsbeschreibung nutzen, die jede Spezies, wie Elektronen und Protonen, durch eine eigene Flüssigkeit beschreibt. Um auch Effekte unterhalb der Gyroskalen in der Zeitentwicklung zu berücksichtigen, können die Reihenentwicklungsmodelle ebenfalls auf die Mehrflüssigkeitsbeschreibung übertragen werden. Das Vorgehen dabei ist analog zu dem in Kapitel 4 für die MHD-Beschreibung geschilderten Verfahren. Die MHD-Gleichungen müssen dabei durch die entsprechenden Gleichungen der Mehrflüssigkeitsbeschreibung ersetzt und die Komponenten der Teilchengrößen Dichte, Geschwindigkeit und Druck in Ansatz (4.8) für jede Teilchenspezies unterschieden werden.





## 10 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden Methoden zur Analyse der Magnetfeldverteilung und präzisen Bestimmung des planetaren Magnetfeldanteils in einer durch die Wechselwirkung mit dem Sonnenwind stark beeinflussten Umgebung ausgearbeitet und angewandt. Entscheidend für eine gute Schätzung des planetaren Magnetfeldes ist die fehlerfreie und effiziente Berechnung seiner zeitabhängigen Wechselwirkung mit dem Sonnenwind. Die Wechselwirkung wird im Rahmen eines MHD-Modells dargestellt, in das die zeitabhängigen Sonnenwindbedingungen sowie das planetare Magnetfeld über Parameter eingehen. Weitere Parameter sind die Diffusionskoeffizienten, wie Resistivität und Viskosität, die Eigenschaften des Plasmas spezifizieren. Die Methoden sollen in Hinblick auf die kommende BepiColombo-Mission die Interpretation der Magnetfelddaten bei Merkur verbessern. Dabei sind die wesentlichen Schwerpunkte dieser Arbeit:

- Datenassimilation mit einer MHD-Simulation (Kap. 2–3):  
Es wurde ein MHD-Simulationscode ausgearbeitet, bei dem eine Kostenfunktion die Abweichungen der Lösungen zu Raumfahrzeugdaten quantifiziert. Über ein Gradientenverfahren ließen sich planetare Magnetfeldparameter bestimmen, wobei auch ein adjungierter MHD-Simulationscode untersucht wurde.
- Reduzierte MHD-Modelle zur Analyse der Wechselwirkung (Kap. 4–6):  
Über eine an die Magnetosheathgeometrie angepasste Reihenentwicklung wurden reduzierte MHD-Modelle hergeleitet. Mit diesen ließen sich physikalische Prozesse, wie der magnetische Pile-up, Deflexion der Sonnenwindströmung, Rekonnektion und Diffusion untersuchen. Außerdem wurde eine Singularitätsanalyse eingeführt, mit der die Auswirkungen einer inhomogenen Resistivitätsverteilung betrachtet wurden.
- Verbesserte Parameterschätzung (Kap. 5.5 und 7–9):  
Aufgrund der kleineren numerischen Fehler ließen sich mit den reduzierten MHD-Modellen präzise Parameterschätzungen durchführen. Dabei wurden die Modellparameter der Diffusion, des Sonnenwindes und des planetaren Magnetfeldes aus Raumfahrzeugdaten bestimmt. Abschließend wurde eine Projektionsabbildung eingeführt, mit der sich solche Schätzungen zeiteffizient in der gesamten Wechselwirkungsregion durchführen lassen.

Im Detail wurde zunächst in Kapitel 2 ein MHD-Simulationscode nach Ogino (1993) zur Berechnung der Wechselwirkung eingeführt. Der Simulationscode löst die partiellen Differenzialgleichungen der MHD über ein Lax-Wendroff-Schema. Es wurden neue

innere und äußere Randbedingungen ausgearbeitet sowie die Anfangsbedingungen verallgemeinert, um auch zeitabhängige Sonnenwindbedingungen und eine Drehung des Planeten bei einer Verkippung des Dipolmoments gegenüber der Rotationsachse miteinzubeziehen. Die Diffusionskoeffizienten waren so gewählt, dass sie eine stabile Simulation über die betrachteten Zeiträume ermöglichten. Durch einen Vergleich zwischen Simulationsergebnissen und Raumfahrzeugdaten der THEMIS-Mission bei der Erde ließ sich der MHD-Simulationscode testen. Die Parameter des planetaren Magnetfeldes wurden auf die bekannten Werte des Erdmagnetfeldes gesetzt und in-situ Messungen bestimmten die benötigten Sonnenwindparameter. Es zeigte sich, dass der modifizierte MHD-Simulationscode einige Beobachtungen reproduzieren konnte, aber auch Unterschiede, insbesondere in der Lage der Magnetosheath und in der Teilchendichte, auftraten.

In Kapitel 3 wurde eine Kostenfunktion eingeführt, die die Abweichungen zwischen Raumfahrzeugdaten und der Lösung einer MHD-Simulation bestimmt, indem sie die quadratischen Abweichungen aufsummiert. Ein optimaler Schätzer für das planetare Magnetfeld mit dem Simulationscode ließ sich aus den Raumfahrzeugdaten über ein gradientenbasiertes Minimierungsverfahren, den BFGS-Algorithmus, berechnen. Um die benötigten Gradienten mit den laufzeitintensiven MHD-Simulationen effizient berechnen zu können, wurde ein adjungierter MHD-Simulationscode mit dem Verfahren des automatischen Differenzierens erstellt. Bei den Testläufen zur Bestimmung eines Gradienten bezüglich der Dipol- und Quadrupolparameter ließ sich ein Laufzeitvorteil der adjungierten Methode von bis zu 33% gegenüber einer Berechnung durch finite Differenzen feststellen. Den theoretisch möglichen Vorteil von etwa 78% konnte man aufgrund von Speicherbeschränkungen nicht erreichen. Das Schätzverfahren der planetaren Magnetfeldparameter wurde mit THEMIS-Daten aus der Magnetosheath bei der Erde getestet. Dabei musste sich auf die Schätzung der Komponenten des Dipolmoments beschränkt werden, weil die Quadrupolkomponenten nahe der Erdmagnetopause zu schwach sind. Die geschätzten Werte schienen den Betrag des Dipolmoments, verglichen mit dem bekannten Wert bei der Erde, systematisch zu überschätzen, wobei der Fehler in der  $z$ -Komponente des Dipols bei etwa 15% lag.

Ausgehend von einem solchen ersten Schätzer für das Dipolmoment wurde in Kapitel 4 die Interaktion zwischen dem Sonnenwind und dem planetaren Magnetfeld für die ideale MHD-Näherung detailliert untersucht. Dazu wurden reduzierte MHD-Modelle aus den MHD-Gleichungen über eine Reihenentwicklungsmethode hergeleitet, die die Prozesse der Wechselwirkung bezüglich des Abstandes zur  $x$ -Achse, der Richtung des Sonnenwindes, in der Magnetosheath ordnet. Es ergaben sich damit zugehörige Reihenentwicklungsmodelle in verschiedenen Entwicklungsordnungen. Für das Modell niedrigster Ordnung ließ sich eine analytische Lösung herleiten, die einen Einblick in die grundlegenden Prozesse der Wechselwirkung gewährt. Beispielsweise führt die Wechselwirkung auf ein Druckgleichgewicht zwischen dem anströmenden Sonnenwind und dem durch elektrische Ströme modifizierten planetaren Magnetfeld, welches die Lage der Magnetopause bestimmt. Die Abbremsung der super-magnetosonischen Sonnenwindströmung zur Magnetopause hin erfordert eine Ablenkung der Strömung durch eine gekrümmte Bugstoßwelle. Weiterhin wurde gezeigt, dass nicht nur diese Ablenkung, sondern auch ein Sonnenwindmagnetfeld die Dicke der Magnetosheath beeinflusst. Das Sonnenwindmagnetfeld staut sich vor der Magnetopause an und verbreitert die Magnetosheath, wie anhand der analytisch hergeleiteten Gleichung (4.93) zu erkennen ist. Ein Vergleich zwischen den

Lösungen des Reihenentwicklungsmodells nullter Ordnung und der MHD-Simulation offenbarte unterschiedliche Bugstoßwellen- und Magnetopausenpositionen. Diese Unterschiede konnten auf die endlichen Diffusionskoeffizienten im MHD-Simulationscode zurückgeführt werden, die in einem Reihenentwicklungsmodell der idealen MHD, im Gegensatz zur MHD-Simulation, Null sind. Es wurde gezeigt, dass die Diffusionskoeffizienten einen großen Einfluss auf die Lösung haben, wobei diese im MHD-Simulationscode durch das numerische Lösungsverfahren wesentlich mitbestimmt werden.

Zur genaueren Untersuchung der Auswirkungen eines endlichen Koeffizienten der Resistivität wurde in Kapitel 5 das Reihenentwicklungsmodell um Terme der nicht-idealen MHD erweitert. Das planetare Magnetfeld kann aufgrund der endlichen Resistivität in die Magnetosheath diffundieren. Zusammen mit einem südwärtigen Sonnenwindmagnetfeld führt dies zu einer antiparallelen Magnetfeldkonfiguration. Könnte sich in der Beschreibung der idealen MHD das Sonnenwindmagnetfeld noch bis vor die Magnetopause anstauen, führt bei einer endlichen Leitfähigkeit eine antiparallele Magnetfeldkonfiguration dazu, dass magnetische Rekonnexion diesem Prozess entgegenwirkt. Wie gezeigt wurde, lässt sich dieser Prozess für die asymmetrische Strömungssituation an der subsolaren Magnetopause durch modifizierte Sweet-Parker-Relationen beschreiben. Insgesamt wird die Magnetfeldverteilung hinter der Bugstoßwelle, in der Magnetosheath nahe der Stagnationslinie, im Wesentlichen durch Anstauen, Rekonnexion und Diffusion von Magnetfeld bestimmt. Die Betrachtungen zum Diffusionsprozess ließen sich nutzen, um aus Raumfahrzeugmessungen den Parameter der Resistivität an der subsolaren Magnetopause ohne numerischen Fehler abzuschätzen. Für die Erde ergab sich  $\eta_0 = 0.2 \cdot 10^4 \text{ Vm/A}$  und für Merkur  $\eta_0 = 0.1 \cdot 10^4 \text{ Vm/A}$ . Dabei sind die Werte deutlich niedriger als sie für stabile MHD-Simulationen in der Schätzung des planetaren Magnetfeldes benötigt wurden.

Der in Kapitel 5 untersuchte Rekonnexionsprozess war vom Sweet-Parker-Typ. Dabei wurde eine homogene Resistivitätsverteilung angenommen. Wie Simulationen zeigen, kann eine lokal erhöhte Resistivität langsame Stoßwellen in einem Diffusionsgebiet hervorrufen, was nach Petschek (1964) den Prozess der magnetischen Rekonnexion beeinflusst. Aus diesem Grund wurden in Kapitel 6 die Bedingungen für Stoßwellen in einem Plasma mit einer inhomogenen Resistivitätsverteilung untersucht. Dazu wurden aus Termumformungen der MHD-Gleichungen Ausdrücke für die räumlichen Variationen der physikalischen Größen aufgestellt. Unter gewissen Voraussetzungen ließen sich hebbare Singularitäten in den Ausdrücken mit den starken räumlichen Variationen der physikalischen Größen durch eine Stoßwelle in Verbindung bringen. Daraus ergaben sich notwendige Bedingungen für Stoßwellen, die vom Gradienten der Resistivität abhängen. Durch eine lokal erhöhte Resistivität können die notwendigen Bedingungen für eine Stoßwelle nach Petschek (1964) erfüllt sein, wobei die hinreichenden Bedingungen noch genauer zu überprüfen sind. Stoßwellen sind ein Grenzfall für die Ausbreitung von Wellen und deshalb darf angenommen werden, dass Gradienten der Resistivität auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen modifizieren. Lassen sich solche Effekte in Raumfahrzeugdaten identifizieren, erlaubt dies Rückschlüsse auf die Inhomogenität der Resistivitätsverteilung.

Der Vergleich von Lösungen der MHD-Simulation und des Reihenentwicklungsmodells nullter Ordnung der idealen MHD ergab eine bessere Übereinstimmung vom reduzierten MHD-Modell nahe der Stagnationslinie mit Beobachtungen. Weiterhin ließen sich keine stabilen MHD-Simulationen mit dem zuvor geschätzten Wert für die Resistivität an

der Magnetopause durchführen. Daher wurde in Kapitel 7 eine erneute Schätzung des Dipolmoments der Erde aus THEMIS-Daten der Magnetosheathregion vorgenommen. Die nullte Ordnung des Reihenentwicklungsmodells beschränkt die verwendbaren Daten auf die Umgebung um die Staupunktstromlinie. Die Schätzung des planetaren Magnetfeldes lieferte im Vergleich zu der Schätzung mit der MHD-Simulation einen deutlich kleineren systematischen Fehler von unter 4%. Aufgrund der effizienten Berechnungen der Wechselwirkung über das Reihenentwicklungsmodell ließ sich eine größere Datenmenge betrachten, mit der der Schätzprozess genauer untersucht wurde. Es zeigte sich zum Beispiel, dass die Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit des Sonnenwindes entscheidend für eine präzise Schätzung des planetaren Magnetfeldes ist. Der statistische Fehler in der Schätzung des planetaren Magnetfeldes kann insbesondere durch eine möglichst große Anzahl an betrachteten Raumfahrzeugdurchgängen durch die Magnetosheath und die Berücksichtigung der gesamten Magnetosheathdaten verringert werden.

Bei vorherigen Schätzungen mussten zeitgleich zu den Messungen in der Magnetosheath die Sonnenwindbedingungen über ein zweites Raumfahrzeug gemessen werden, um die Wechselwirkung zu berechnen. Allerdings befinden sich voraussichtlich oftmals bei der BepiColombo-Mission beide Raumfahrzeuge innerhalb der Wechselwirkungsregion. Daher wurde in Kapitel 8 die Rekonstruktion von Sonnenwindbedingungen aus Daten der Magnetosheath untersucht. Die rekonstruierten Sonnenwindbedingungen lassen sich dann für die Schätzung des planetaren Magnetfeldes mit Daten eines weiteren Raumfahrzeugs in der Magnetosheath benutzen. Aufgrund der Vielzahl der zu schätzenden Parameter wurde für eine effiziente Berechnung der Wechselwirkung das Reihenentwicklungsmodell nullter Ordnung verwendet. Im Gültigkeitsbereich des Modells, nahe der Stagnationslinie, ließen sich die Sonnenwindbedingungen aus Magnetosheathdaten gut rekonstruieren. Weiterhin ermöglichte das effiziente Verfahren auch eine simultane Schätzung von Sonnenwindbedingungen und planetarem Dipolmoment mit Daten aus der Magnetosheath von zwei Raumfahrzeugen zu einem Zeitpunkt. Der Fehler für das planetare Magnetfeld lag dabei im Bereich der Fehler, die bei der direkten Schätzung des planetaren Magnetfeldes in Kapitel 7 auftraten. Somit ist die zuverlässige Schätzung von Sonnenwind- und planetaren Magnetfeldparametern mit Messungen von zwei Raumfahrzeugen auch möglich, wenn sich beide Raumfahrzeuge in der Magnetosheath befinden. Dies erhöht die Anzahl der zur Bestimmung der planetaren Magnetfeldparameter verwendbaren Magnetosheathdurchgänge, was den statistischen Fehler in der Schätzung verringert.

Das Reihenentwicklungsmodell nullter Ordnung hat wegen der besser angepassten Diffusionsparameter nahe der Stagnationslinie einen kleineren Modellfehler im Vergleich zur MHD-Simulation und ist wesentlich effizienter berechenbar. Allerdings ist die Lösung durch die nullte Entwicklungsordnung auf die Region der Staupunktstromlinie beschränkt. Um die Gültigkeit des Reihenentwicklungsmodells auf die gesamte Magnetosheath auszudehnen, wurde in Kapitel 9 eine Projektionsabbildung eingeführt. Diese ließ sich aus einem Vergleich der stationären Basislösungen für typische Sonnenwindbedingungen zwischen der MHD-Simulation und dem Reihenentwicklungsmodell nullter Ordnung sowie einer Lösung des Reihenentwicklungsmodells bezüglich neuer, beliebiger Sonnenwindbedingungen bestimmen. Die Projektionsabbildung modifiziert über Skalierungsfaktoren die physikalischen Größen und die Geometrie der Basislösung der MHD-Simulation gemäß der neuen Sonnenwindbedingungen. Es wurde ge-

zeigt, dass die über die Projektionsabbildung berechnete Lösung die Eigenschaften der MHD-Simulation neben der Stagnationslinie reproduzieren kann. Dabei ist diese Berechnung der Lösung um etwa 6 Größenordnungen schneller als eine Berechnung durch den MHD-Simulationscode. Weil allerdings das Reihenentwicklungsmodell nahe der Stagnationslinie einen kleineren Modellfehler aufweist, wurde die Projektionsabbildung dahin gehend korrigiert. Schlussendlich ermittelt die Projektionsabbildung die Lösung nicht nur effizienter als die MHD-Simulation, sondern auch mit kleinerem Fehler. Die schnelle Berechnung bietet die Möglichkeit, die Sonnenwindbedingungen und das planetare Magnetfeld simultan zu schätzen, wenn sich zwei Raumfahrzeuge innerhalb der Wechselwirkungsregion befinden. Die Resistivität im MHD-Modell lässt sich aus den Betrachtungen des Reihenentwicklungsmodells nullter Ordnung an der Magnetopause abschätzen. Damit lassen sich die wichtigsten Parameter der MHD-Beschreibung der Wechselwirkung alle aus Raumfahrzeugdaten bestimmen.

Wie in Kapitel 9.4 geschildert, gibt es verschiedene Möglichkeiten die Projektionsabbildung weiter zu verbessern, falls eine noch genauere Berechnung nötig ist. Dabei können auch Effekte unterhalb der Gyroskala berücksichtigt werden. Neben diesen methodischen Erweiterungen lässt sich auch die Beschreibung der Wechselwirkung weiter ergänzen. Insbesondere ist eine detailliertere Modellierung des Planeteninneren möglich. Damit können beispielsweise Induktionseffekte im Planeten in Schichten mit endlicher Leitfähigkeit aufgrund von Variationen elektrischer Stromsysteme der Wechselwirkung außerhalb des Planeten berücksichtigt werden. Über ein Modell der elektromagnetischen Induktion lässt sich das Magnetfeld der Induktionsströme außerhalb des Planeten ermitteln. Dabei kann für die Berechnung der zeitabhängigen Variationen der Magnetosheath weiterhin die quasi-stationäre Näherung verwendet werden, jedoch nicht für das Modell der Induktion im Planeten. Dort muss die Diffusionsgleichung (2.32) zeitabhängig gelöst werden. Das sich durch die Induktion ergebende veränderte Magnetfeld außerhalb des Planeten beeinflusst die Randbedingungen im Reihenentwicklungsmodell an der Magnetopause und ist für jeden quasi-stationären Zeitpunkt zu berücksichtigen. Die elektrische Leitfähigkeit im Planeteninneren lässt sich durch ein Schichtmodell der Resistivität modellieren. Die zusätzlichen Parameter der Resistivität können ebenfalls über Magnetfeldmessungen von Raumfahrzeugen simultan zu den Parametern des planetaren Magnetfeldes geschätzt werden. Für die Berechnung des Induktionsprozesses eignet sich der MHD-Simulationscode in dieser Arbeit, da das Planeteninnere schon entsprechend angepasst wurde. Zusammen mit der effizienten Berechnung der Wechselwirkung außerhalb des Planeten über die Projektionsabbildung ist so die zeitaufwendige simultane Bestimmung der planetaren Magnetfeldparameter und der Leitfähigkeitsverteilung durchführbar.

Für eine Bestimmung aller Parameter der zeitabhängigen MHD-Beschreibung der Wechselwirkung werden bei Verwendung der bisher vorgestellten Verfahren bisher stets Messungen von mindestens zwei Raumfahrzeugen benötigt. Allerdings haben viele Missionen nur ein einziges Raumfahrzeug, welches die Umgebung eines Planeten erforscht. Befindet sich das Raumfahrzeug einen Teil der Zeit im Sonnenwind, dann können die in dieser Arbeit entwickelten Verfahren auch für eine solche Mission angewendet werden, wie im Folgenden dargestellt. Zunächst werden aus den Sonnenwindbeobachtungen, wie in Kapitel 1.2 gezeigt, Referenzverteilungen für die Sonnenwindbedingungen bestimmt. Anschließend sind die Sonnenwindbedingungen wie in Kapitel 8, ausgehend von einem initialen Schätzer für das planetare Magnetfeld, für alle Plasma- und Magnetfelddaten von

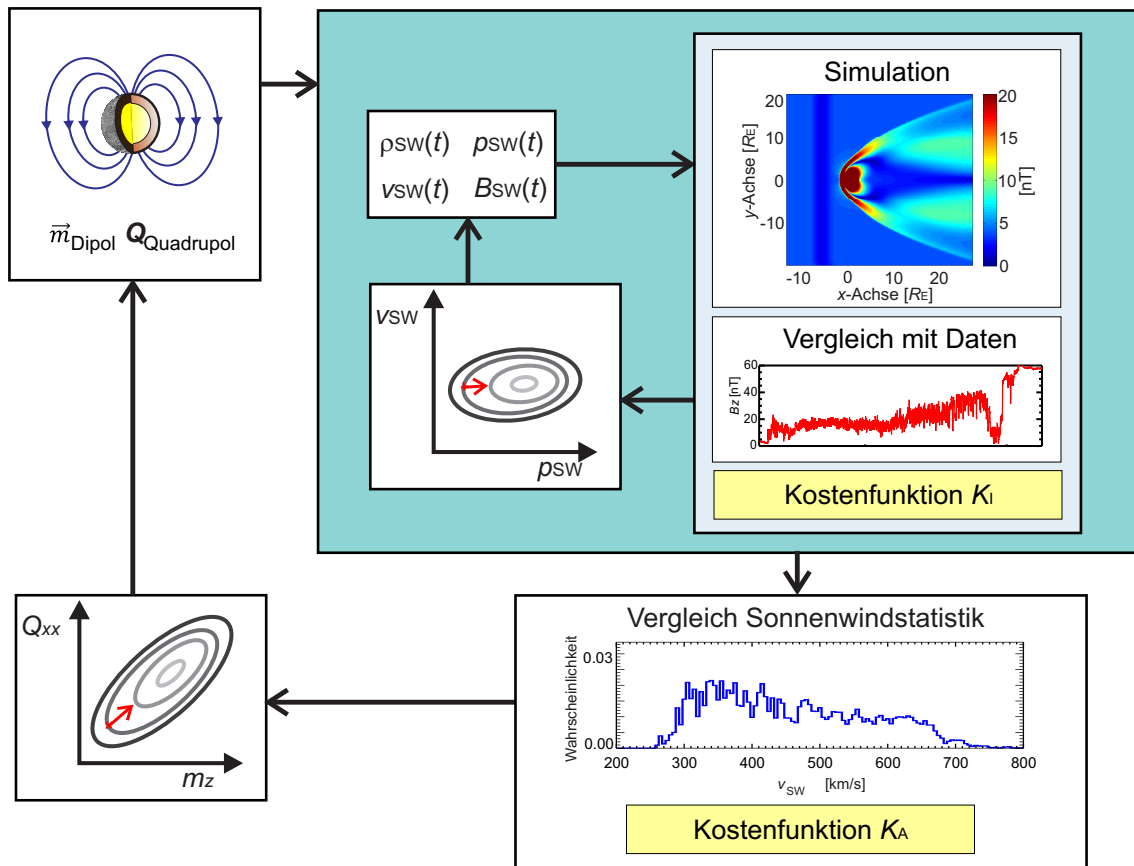


Abbildung 10.1: Mit einem initialen Schätzer des planetaren Magnetfeldes lassen sich alle Sonnenwindbedingungen von Raumfahrzeugdaten innerhalb der Wechselwirkungsregion durch Minimierung der Kostenfunktion  $K_I$  rekonstruieren. Die sich daraus ergebenden Verteilungsfunktionen des Sonnenwinds können mit aus Messungen bestimmten Statistiken verglichen werden, was die Kostenfunktion  $K_A$  bestimmt. Durch eine Minimierung der Kostenfunktion  $K_A$  werden dann die planetaren Magnetfeldparameter geschätzt.

Raumfahrzeugmessungen zu rekonstruieren. Daraus lassen sich statistische Verteilungsfunktionen bilden. Die planetaren Magnetfeldparameter werden dann variiert, bis die Momente dieser Verteilungsfunktionen mit denen der Referenzverteilungen übereinstimmen (siehe Abb. 10.1). Die Schätzung erfordert zwei ineinander verschachtelte Iterationen zur Anpassung aller Parameter. Dadurch muss die zeitabhängige Wechselwirkung für die gesamte Missionslaufzeit mehrfach berechnet werden. Mit den Reihenentwicklungsmodellen und der Projektionsabbildung lässt sich ein solches Vorgehen effizient durchführen.

# A Koordinatentransformationen

Die Darstellung des Erdmagnetfeldes erfordert die Verwendung der körperfesten GEO-Koordinaten. Die wichtigsten Transformationen von den GSE- und GSM-Koordinaten für Raumfahrzeugdaten in das GEO-Koordinatensystem werden im Folgenden vorgestellt. Die Gleichungen werden aus den Darstellungen von Hapgood (1992) mit der Korrektur aus Hapgood (1997) hergeleitet.

Die Transformationen nutzen folgende Drehmatrizen:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_x(\Omega) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Omega) & -\sin(\Omega) \\ 0 & \sin(\Omega) & \cos(\Omega) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{R}_y(\Omega) &= \begin{pmatrix} \cos(\Omega) & 0 & \sin(\Omega) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\Omega) & 0 & \cos(\Omega) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{R}_z(\Omega) &= \begin{pmatrix} \cos(\Omega) & -\sin(\Omega) & 0 \\ \sin(\Omega) & \cos(\Omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{A.1}$$

Dabei bezeichnet  $\Omega$  den Drehwinkel. Ein Vektor  $\vec{p}_v$  wird über  $\mathbf{R}_x(\Omega) \cdot \vec{p}_v$  um die  $x$ -Achse um den Winkel  $\Omega$  gedreht. Analog lässt sich mit  $\mathbf{R}_y(\Omega)$  eine Drehung um die  $y$ -Achse und mit  $\mathbf{R}_z(\Omega)$  eine Drehung um die  $z$ -Achse durchführen. Da die Drehmatrizen orthogonal sind, erhält man die zugehörige inverse Matrix, die also einer Drehung um  $-\Omega$  entspricht, durch Transponieren.

Damit Raumfahrzeugdaten in GEO-Koordinaten ausgegeben werden können, lassen sich die sogenannten GEI-(Geocentric-Equatorial-Inertial-)Koordinaten als Zwischenschritt verwenden. Im GEI-Koordinatensystem zeigt die  $x$ -Achse stets in Richtung der Frühlings-Tagundnachtgleiche (Äquinoktium im März), also entlang der Schnittrachse von Äquatorialebene und Ekliptik. Die  $z$ -Achse ist in Richtung der Drehachse der Erde orientiert und die  $y$ -Achse vervollständigt ein rechtshändiges Orthogonalsystem. Die Transformation von GEI-Koordinaten in das erdfeste GEO-Koordinatensystem erfolgt über eine Drehung um die  $z$ -Achse mit der Drehmatrix

$$\mathbf{T}_1 := \mathbf{R}_z(\theta(t_{\text{UT},s}, T_s)).\tag{A.2}$$

Der Winkel  $\theta(t_{\text{UT},s}, T_s)$  ist die Sternzeit in Grad, auch als GMST (Greenwich Mean Sideral Time) bezeichnet und kann über

$$\theta(t_{\text{UT},s}, T_s) = 100.461^\circ + 36000.77^\circ T_s + 0.000388^\circ T_s^2 + 15.0411 t_{\text{UT},s}\tag{A.3}$$

berechnet werden (Nautical Almanac Office 1989). Dabei ist  $t_{UT,s}$  die Zeit in Universal Time am gewünschten Datum in Sekunden und  $T_s$  ist definiert über

$$T_s := \frac{J - 2451545}{36525}, \quad (\text{A.4})$$

wobei  $J$  das julianische Datum für 0 UT ist.

Um vom GEI-Koordinatensystem in das GSE-Koordinatensystem zu transformieren, muss die  $z$ -Achse senkrecht zur Ekliptik und die  $x$ -Achse in Richtung Sonne gedreht werden (Nautical Almanac Office 1989). Dazu wird zunächst das GEI-Koordinatensystem um die  $x$ -Achse mit  $R_x(\epsilon(T_s))$  gedreht, wobei

$$\epsilon(T_s) = 23.439 - 0.013 T_s. \quad (\text{A.5})$$

Anschließend wird eine Drehung in der Ekliptik über die Drehmatrix  $R_z(\lambda_z)$  ausgeführt, sodass die  $x$ -Achse in Richtung Sonne zeigt. Um den Winkel  $\lambda_z$  zu bestimmen, berechnet man zunächst die mittlere Sonnenanomalie über

$$M(t_{UT,s}, T_s) = 357.528 + 35999.050 T_s + 0.04107 t_{UT,s}. \quad (\text{A.6})$$

Weiterhin wird die geographische Länge der Sonne bestimmt:

$$\Lambda(t_{UT,s}, T_s) = 280.460 + 36000.772 T_s + 0.04107 t_{UT,s}. \quad (\text{A.7})$$

Der Drehwinkel um die  $z$ -Achse ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \lambda_z(t_{UT,s}, T_s) = & \Lambda(t_{UT,s}, T_s) + (1.915 - 0.048 T_s) \sin(M(t_{UT,s}, T_s)) \\ & + 0.02 \sin(2 M(t_{UT,s}, T_s)). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_2$  von GEI- in GSE-Koordinaten ergibt sich als Hintereinanderausführung der Drehungen um die  $x$ - und  $z$ -Achse durch

$$\mathbf{T}_2 := \mathbf{R}_z(\lambda_z(t_{UT,s}, T_s)) \cdot \mathbf{R}_x(\epsilon(T_s)). \quad (\text{A.9})$$

Somit ist die Transformationsmatrix von GEO- in GSE-Koordinaten durch

$$\mathbf{T}_3 := \mathbf{R}_z(\lambda_z(t_{UT,s}, T_s)) \cdot \mathbf{R}_x(\epsilon(T_s)) \cdot \mathbf{R}_z(\theta(t_{UT,s}, T_s))^T \quad (\text{A.10})$$

gegeben.

Für eine Transformation von GSE- in GSM-Koordinaten muss die  $yz$ -Ebene der GSE-Koordinaten auf die Dipolachse gedreht werden. Da die  $x$ -Achse weiterhin zur Sonne zeigt, wird dazu eine Drehung um die  $x$ -Achse über folgende Drehmatrix durchgeführt:

$$\mathbf{T}_4 := \mathbf{R}_x(\Psi). \quad (\text{A.11})$$

Der Drehwinkel  $\Psi$  ist

$$\Psi = \arctan\left(\frac{y_e}{z_e}\right). \quad (\text{A.12})$$

Hierbei ist  $\vec{m}_e := (x_e, y_e, z_e)^T$  der normierte Einheitsvektor des Dipolmoments in GSE-Koordinaten ist. Dieser lässt sich leichter in den zuvor beschriebenen GEO-Koordinaten in Kugelkoordinaten ausdrücken über

$$\vec{m}_g = \left( \cos(\phi_g) \cos(\lambda_g), \cos(\phi_g) \sin(\lambda_g), \sin(\phi_g) \right)^T. \quad (\text{A.13})$$



Die benötigten Winkel können über die Gauss-Koeffizienten des Erdmagnetfeldes bestimmt werden. Der Längenwinkel des Dipolmoments ist

$$\lambda_g = \arctan\left(\frac{h_1^1}{g_1^1}\right) \quad (\text{A.14})$$

und Breitenwinkel ist

$$\phi_g = 90.0^\circ - \arctan\left(\frac{g_1^1 \cos(\lambda_g) + h_1^1 \sin(\lambda_g)}{g_1^0}\right). \quad (\text{A.15})$$

Der Dipolvektor in GEO-Koordinaten  $\vec{m}_g$  kann über die Matrix  $\mathbf{T}_3$  in GSE-Koordinaten transformiert werden:

$$\vec{m}_e = \mathbf{T}_3 \cdot \vec{m}_g. \quad (\text{A.16})$$



## B Details zum MHD-Simulationscode

### B.1 Implementierung in Fortran

Der MHD-Simulationscode aus dieser Arbeit, basierend auf dem numerischen Schema von Ogino (1993) mit den Modifikationen und Erweiterungen wie in Kapitel 2 beschrieben, wurde in Fortran 90 implementiert. Der Simulationscode ist dabei in sieben Fortran-Module sowie das Hauptprogramm (*program earth\_mag*) unterteilt. Die im Fortran-Code verwendeten Bezeichnungen sind kursiv geschrieben.

#### Das Modul *constants*

Dieses Modul beinhaltet häufig genutzte Konstanten und Variablen, die für wichtige Einstellungen des Simulationscodes verantwortlich sind. Im Folgenden werden kurz die wichtigsten Einstellungsmöglichkeiten erläutert, wobei die Bezeichnungen von Variablen aus der numerischen Implementierung des Codes in eckigen Klammern angegeben werden.

Der Simulationscode ist mithilfe des MPI-(Message-Passing-Interface-)Standards parallelisiert. Dabei wird das Simulationsgebiet in  $z$ -Richtung in verschiedene, etwa gleich große Abschnitte unterteilt. Die Anzahl der Abschnitte ist durch die Konstante  $N_{\text{CPU}}$  [*npe*] festgelegt. Der Zusammenhang zum MPI-Standard wird in der Beschreibung des Moduls *para\_def* erläutert.

Im Modul *constants* werden die in Kapitel 2 beschriebenen Konstanten des numerischen Gitters,  $i_{\text{max}}$  [*nx*],  $j_{\text{max}}$  [*ny*],  $k_{\text{max}}$  [*nz*] und  $i_{\text{p}}^*$  [*nxp*] festgelegt. Auch die Ausdehnung der Simulationsbox über  $x_{\text{L}}$  [*xl*],  $y_{\text{L}}$  [*yl*] und  $z_{\text{L}}$  [*zl*] sowie die maximale Anzahl der Zeitschritte  $l_{\text{max}}$  [*last*] werden bestimmt. Die Zeitauflösung  $\Delta t$  ist mit der Gitterauflösung in  $x$ -Richtung über  $\Delta t = 0.5 \Delta x d_t$  durch die Konstante  $d_t$  [*thx*] verknüpft. Eine Veränderung der Gitterauflösung über  $\Delta t$  bei konstantem  $d_t$  ist dann automatisch mit einer Veränderung der Zeitauflösung gemäß des Courant–Friedrichs–Lewy-Kriteriums (2.13) verknüpft. Des Weiteren lässt sich der Planetenradius  $R_{\text{Planet}}$  [*ra\_i*] festlegen.

Die Sonnenwindbedingungen  $\rho_{\text{SW}}$  [*ro01*],  $v_{\text{SW}}$  [*vsw*],  $p_{\text{SW}}$  [*pr01*],  $B_{x,\text{SW}}$  [*imfx*],  $B_{y,\text{SW}}$  [*imfy*] und  $B_{z,\text{SW}}$  [*imfz*] können initialisiert werden. Es lassen sich die numerischen Parameter  $D_{\rho}$  [*dfu*],  $D_v$  [*vmu*],  $D_p$  [*pmu*],  $\eta_{\text{A}}$  [*eatt*] festlegen, welche im Simulationscode über eine Normierung durch die initiale Sonnenwinddichte  $\rho_{\text{SW}}(t_0)$  bestimmt sind. Es werden die Definitionen  $\tilde{D}_v := D_v / \rho_{\text{SW}}(t_0)$  [*vmu0*],  $\tilde{D}_p := D_p / \tilde{D}_v$  [*pmu0*] und  $\tilde{D}_{\rho} := D_{\rho} / \tilde{D}_v$  [*dfu0*] verwendet. Das Planeteninnere wird durch  $\eta_{\text{Kern}}$  [*eat\_core*],  $\eta_{\text{Mantel}}$  [*eat\_mantel*] und  $R_{\text{Kern}}$  [*ra\_c*] beschrieben. Das dort erzeugte planetare Magnetfeld ist durch die Dipolparameter  $m_x$  [*b0x*],  $m_y$  [*b0y*],  $m_z$  [*b0z*] und die Quadrupolparameter  $Q_{xx}$  [*Qxx*],  $Q_{xy}$  [*Qxy*],  $Q_{yy}$  [*Qyy*],  $Q_{xy}$  [*Qxy*],  $Q_{yz}$  [*Qyz*] sowie die zugehörigen Drehwinkel  $\phi_{\text{K}}$  [*phi*] und  $\lambda_{\text{K}}$  [*theta*] bestimmt.

### Das Modul *initial*

Die diskretisierte MHD-Lösung  $u_{l,i,j,k}^n [f(i,j,k,n)]$  wird für einen Zeitpunkt  $l$  in einem Feld (englisch: array) abgespeichert, wobei die Größe des Feldes  $[f(nx2,ny2,nz2,8)]$  durch  $i_{\max} + 2 [nx2]$ ,  $j_{\max} + 2 [ny2]$ ,  $k_{\max} + 2 [nz2]$  und die Anzahl der MHD-Variablen  $N_{\text{var}} [8]$  festgelegt ist. Dabei bestimmt der letzte Index des Feldes die jeweilige MHD-Variable, das heißt, die Komponente des Lösungsvektors  $\vec{u}(x, t)$ . Die Lösung  $u_{l,i,j,k}^n$  besitzt als physikalischen Größen die Dichte  $\rho [n=1]$ , die Geschwindigkeitskomponenten  $v_x [n=2]$ ,  $v_y [n=3]$ ,  $v_z [n=4]$ , den Druck  $p [n=5]$  und die Magnetfeldkomponenten  $B_x [n=6]$ ,  $B_y [n=7]$ ,  $B_z [n=8]$ .

Im Modul *initial* werden Werte für dieses Feld, wie in Kapitel 2.2 beschrieben wurde, initialisiert. Dazu dient das Unterprogramm *equilout*. Dort wird zunächst das Magnetfeld über eine numerische Implementierung der Dipolgleichung (1.15), der Quadrupolgleichung (2.23) und der Summe beider Beiträge gemäß Gleichung (2.21) bestimmt. Es resultiert das planetare Magnetfeld  $\vec{B}_{\text{Planet}} [BE(:, :, :)]$ . Ein Dipol und ein Quadrupol sind stromfrei, jedoch ergeben sich wegen der Approximation von Ableitungen durch finite Differenzen in der numerischen Implementierung kleine, von Null verschiedene Werte für  $\nabla \times \vec{B}_{\text{Planet}} [pp(nx2,ny2,nz2,3)]$ . Diese werden abgespeichert und später genutzt, um in der Berechnung eines neuen Zeitschrittes den numerischen Fehler zu verkleinern. Anschließend wird die Dichte, der Druck und die Geschwindigkeit, wie in Kapitel 2.2 beschrieben, initialisiert.

Als Letztes wird noch eine ortsabhängige Resistivitätsverteilung  $\eta(x, y, z) [eta(:, :, :)]$  mit  $\eta_A [eatt]$  initialisiert. Mit  $\eta_{\text{Mantel}} [eta\_mantel]$  wird die Initialisierung innerhalb von  $R_{\text{Planet}}$  überschrieben. Für einen Radius kleiner als  $R_{\text{Kern}}$  wird die Resistivität durch den Wert  $\eta_{\text{Kern}} [eta\_core]$  ersetzt. Abschließend wird noch der räumliche Gradient der Resistivität  $\nabla \eta [etagrid(:, :, :)]$  durch zentrierte finite Differenzen berechnet.

### Das Modul *iodata*

Das Modul *iodata* besitzt verschiedene Unterprogramme, um Daten auszugeben beziehungsweise einzulesen. Das Unterprogramm *writedata* speichert für den aktuellen Zeitschritt  $l [ntap]$  in den Dateipfad “*/xyzDaten/datei’,ntap’,.data*” die Lösung aller MHD-Variablen auf dem gesamten Raumgitter in eine Datei ab. Als zusätzliche Informationen werden zunächst die Gitterkonstanten der Simulation  $i_{\max}$ ,  $j_{\max}$ ,  $k_{\max}$ ,  $i_p^*$  und der aktuelle Zeitschritt  $l$  sowie die Ausmaße der Simulationsbox  $x_L$ ,  $y_L$ ,  $z_L$  abgespeichert. Dann werden die Daten der MHD-Variablen hintereinander für die verschiedenen MHD-Größen abgespeichert. Dabei wird für das Magnetfeld vorher das planetare Magnetfeld  $\vec{B}_{\text{Planet}}$  subtrahiert. Zum Schluss werden noch eine Reihe weiterer Werte, wie beispielsweise die Dipol- und Quadrupolparameter und die Diffusionskonstanten, an die Datei angefügt.

Das Unterprogramm *readdata* ist in der Lage, eine solche zuvor abgespeicherte Datei wieder einzulesen. Dabei werden die Simulationsparameter mit denen des Moduls *constants* verglichen und Warnhinweise bei Unterschieden ausgegeben, da diese Werte für eine korrekte Simulation übereinstimmen müssen. Das planetare Magnetfeld wird, wie es durch die Parameter im *constants* Modul definiert ist, hinzu addiert.

Neben der vollständigen Ausgabe aller Daten, lässt sich auch eine Schnittebene parallel zur  $xy$ -Koordinatenebene beziehungsweise zur  $xz$ -Ebene durch das Unterprogramm

*writedataplane* ausgeben. Weiterhin ist durch das Unterprogramm *writedatastreamline* die Ausgabe der MHD-Variablen entlang der  $x$ -Achse möglich.

Das Einlesen von Raumfahrzeugdaten für die Verwendung von zeitabhängigen Sonnenwindbedingungen und zum Vergleich mit Simulationsergebnissen ist über das Unterprogramm *scdata* möglich. Dabei besteht eine zum Einlesen geeignete Datei aus 14 Spalten und beliebig vielen Zeilen. Die Spalten geben dabei die Information über den Zeitpunkt der Messung  $t_{SC}$  [s] und die Sonnenwinddaten am Einstörmrand des Simulationsgebietes  $\rho_{SW}$  [1/cm<sup>3</sup>],  $p_{SW}$  [nPa],  $B_{x,SW}$  [nT],  $B_{y,SW}$  [nT],  $B_{z,SW}$  [nT],  $v_{SW}$  [km/s] an. Weiterhin werden die Position des Raumfahrzeugs  $x_{SC}$  [ $R_E$ ],  $y_{SC}$  [ $R_E$ ],  $z_{SC}$  [ $R_E$ ] sowie die Magnetfelddaten  $B_{x,SC}$  [nT],  $B_{y,SC}$  [nT],  $B_{z,SC}$  [nT] im Simulationskoordinatensystem MSP festgelegt. In der letzten Spalte wird noch der Rotationswinkel des Dipolmoments  $\theta_K$  [rad] angegeben. Die Zeilen der Datei beinhalten die gemessenen Daten zu verschiedenen Zeitpunkten. Dies Unterprogramm *scdata* liest diese Informationen in ein Feld  $[SW(14,:)]$  ein.

### Das Modul *boundary*

Die in Kapitel 2.2 beschriebenen Randbedingungen des Simulationsgebietes sind im Modul *boundary* implementiert. Dabei berechnet das Unterprogramm *bdryup* die Randbedingungen für das Einstömen und das Unterprogramm *bdryzm* die Randbedingungen für das Ausströmen an den Rändern. Ein weiteres Unterprogramm *SWmod* bestimmt die Veränderung der Sonnenwindbedingungen mit der Zeit. Dabei wird die Simulationszeit mit der Zeit im Raumfahrzeugdatensatz verglichen und die zur Simulationszeit passenden Sonnenwinddaten rausgesucht. Sollten sich die Sonnenwinddaten gegenüber dem vorherigen Zeitschritt geändert haben, so werden die Sonnenwindvariablen im Fortran-Code auf die neuen Werte gesetzt.

Des Weiteren ist in dem Modul das Unterprogramm *cost* zur Berechnung der Kostenfunktionen aus Kapitel 3.1 implementiert. Dabei muss zunächst die zur Position des Satelliten  $x_{SC}$  [ $x_s$ ],  $y_{SC}$  [ $y_s$ ],  $z_{SC}$  [ $z_s$ ] im diskreten Gitter der Simulation  $i_{SC}$  [ $isat$ ],  $j_{SC}$  [ $jsat$ ],  $k_{SC}$  [ $isat$ ] bestimmt werden. Die Umrechnung erfolgt über die Gleichungen (2.6), die nach den Gitterkoordinaten aufgelöst wurden:

$$\begin{aligned} i_{SC} &= \frac{x_{SC}}{\Delta x} + \frac{i_{\max} + 3}{2} - i_P^*, \\ j_{SC} &= \frac{y_{SC}}{\Delta y} + \frac{j_{\max} + 3}{2}, \\ k_{SC} &= \frac{z_{SC}}{\Delta z} + \frac{k_{\max} + 3}{2}. \end{aligned} \tag{B.1}$$

In der numerischen Implementierung dieser Gleichungen wird nach der Berechnung der rechten Seite über die Fortran-Funktion *nint* auf den nächsten Ganzzahlwert gerundet. Die Kostenfunktion lässt sich dann gemäß Gleichung (3.3) berechnen.

Die Drehung des Planeten für den Dipolanteil kann durch das Unterprogramm *dreh* berücksichtigt werden. Dabei wird die Transformation (2.41) auf das Dipolmoment alle 200 Zeitschritte mit den aktuellen Werten für  $\phi_K$  [ $phi$ ] und  $\lambda_K$  [ $theta$ ] angewandt.

### Das Modul *difmtd*

Die Berechnung eines neuen Zeitschrittes erfolgt im Modul *difmtd* in dem Unterprogramm *mlf*. Der Zeitschritt wird über das in Kapitel 2.1 beschriebene Lax-Wendroff-Verfahren berechnet. Vor dem Ausführen der beiden Schritte des Lax-Wendroff-Schemas erfolgt die Bestimmung der Stromdichte  $j$  über die Rotation des Magnetfeldes. Die MHD-Gleichungen werden über das Lax-Wendroff-Verfahren in dem gesamten Simulationsgebiet außerhalb des Planeten, das heißt für  $r > R_{\text{planet}}$ , gelöst.

Für den Bereich innerhalb des Planeten wird, falls die Option *innerB* eingeschaltet ist, die Diffusionsgleichung (2.32) gelöst. Dabei werden auch Gradienten in der Resistivität  $\nabla\eta$  [*gradeta*] berücksichtigt. Die Option *innerbrdy* kann eine zusätzliche Berechnung von Randwerten für die Dichte, den Druck und die Geschwindigkeit an der Oberfläche des Planeten einschalten. Dabei wird das Unterprogramm *inbrdy* ausgeführt, welche die in Kapitel 2.2 beschriebenen Randbedingungen realisiert. In einer Umgebung um  $R_{\text{planet}}$  wird die Dichte und der Druck auf die zuvor beschriebenen Werte minimaler Wechselwirkung gesetzt. Für die Geschwindigkeit lässt sich über *velbrdy* wählen, ob alle Geschwindigkeitskomponenten an der Oberfläche auf Null gesetzt werden sollen [*velbrd=1*] oder lediglich die Normalkomponente [*velbrdy=2*]. Letztere Option nutzt dabei das Unterprogramm *tanvel* zur Berechnung der tangentialen Geschwindigkeitskomponenten.

### Das Modul *para\_def*

Das Modul *para\_def* beinhaltet die Unterteilung des Simulationsgebietes über das Unterprogramm *zpara* für die Parallelisierung mit MPI. Der MPI-Standard regelt den Nachrichtenaustausch bei simultanen Berechnungen auf mehreren Computern (siehe z. B. Gropp et al. 1999). Dabei erlaubt MPI die Verwendung lokaler Speicher der einzelnen Computer, im Gegensatz zum OpenMP-Standard (Open Multi-Processing), der nur die Verwendung eines gemeinsamen Speichers unterstützt. Durch MPI lassen sich Berechnungen in verschiedene Prozesse aufteilen, die alle im Programm simultan gestartet und dann zeitgleich von verschiedenen Computern eines PC-Clusters oder auch eines Parallelrechners abgearbeitet werden können. Die Anzahl der Prozesse ist im Modul *constants* durch die Konstante  $N_{\text{CPU}}$  festgelegt.

Mit der MPI-Bibliothek lassen sich Befehle implementieren, sodass die Prozesse miteinander kommunizieren, Daten austauschen und sich synchronisieren können. Diese Prozesssteuerung ist auch für alle neu konzipierten Teile des Simulationscodes erforderlich. Ein Unterprogramm der MPI-Bibliothek wird dabei üblicherweise über *call MPI\_NAME(Parameter, ...)* aufgerufen, wobei *MPI\_NAME* den Namen des Unterprogramms bezeichnet. Kommunikatoren definieren eine Gruppe von MPI-Prozessen, wobei der wichtigste vordefinierte Kommunikator *MPI\_COMM\_WORLD* ist, welcher alle MPI-Prozesse umfasst. Die Initialisierung der MPI-Umgebung geschieht durch das Unterprogramm *MPI\_INIT(ier)* und sie wird durch das Unterprogramm *MPI\_FINALIZE(ier)* beendet. Das Unterprogramm *MPI\_COMM\_SIZE(comm, size, ier)* gibt die Anzahl der Prozesse des Kommunikators *comm* in die Ganzzahlvariable *size* zurück. Die Variable *ier* dient bei allen MPI-Unterprogrammen einer Fehlerangabe beim Aufruf des Unterprogramms. Mit *MPI\_COMM\_RANK(comm, id, ier)* wird jedem Prozess ein sie bezeichnender Ganzzahlwert *id*, der Identifizierer, zugewiesen. Dabei werden positive

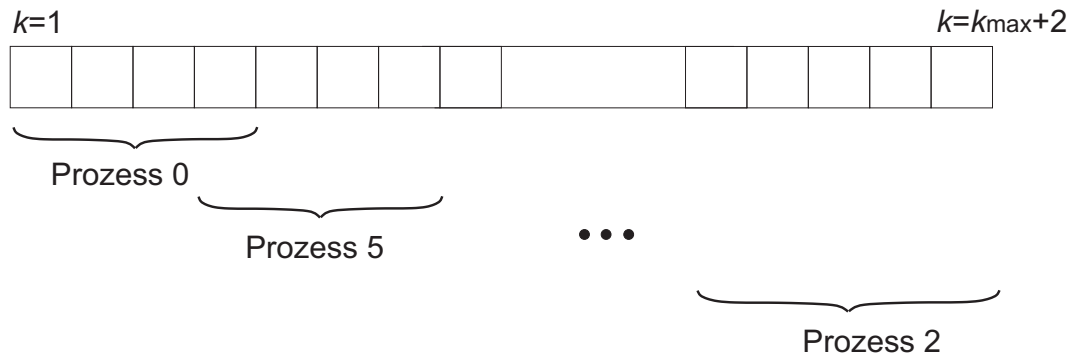


Abbildung B.1: Aufteilung des Simulationsgebietes entlang der  $z$ -Achse mit MPI. Dabei übernehmen verschiedene Prozesse unterschiedliche Abschnitte, wobei die Abschnitte im Inneren des Simulationsgebietes überlappen.

Ganzzahlwerte von 0 bis  $N_{\text{CPU}} - 1$  benutzt.

Mithilfe dieser MPI-Unterprogramme wird im Simulationscode in *para\_def* das Simulationsgebiet in  $z$ -Richtung aufgeteilt, sodass jedem Prozess ein zusammenhängender Abschnitt entlang der  $z$ -Achse im Simulationsgebiet zugeordnet ist. Alle Prozesse stellen die Berechnungen im Simulationscode, unabhängig voneinander, für ihr zugeordnetes Simulationsgebiet an (siehe Abb. B.1). Um auch finiten Differenzen in jedem Gebiet unabhängig voneinander berechnen zu können, überlappen die Berechnungsgebiete für die Prozesse um eine Gitterzelle an allen Rändern im Inneren des Simulationsgebietes. Ändern sich die Randwerte in den überlappenden Gebieten, müssen diese zwischen den beteiligten Prozessen ausgetauscht werden.

Zum Senden der Daten *data* an einen Prozess mit dem Identifizierer *destination* wird das Unterprogramm *MPI\_SEND(data, count, mpi\_type, destination, tag, comm, ier)* aufgerufen. Hierbei gibt *count* die Anzahl der zu verschickenden Daten und *mpi\_type* den zugehörigen Datentyp an. Es gibt unter anderem *MPI\_INTEGER* für Ganzzahlwerte, *MPI\_REAL* für Gleitkommazahlen, *MPI\_DOUBLE\_PRECISION* für Gleitkommazahlen mit doppelter Genauigkeit und *MPI\_LOGICAL* für logische Werte. Die Sendeanweisung wird mit einem Nachrichten-Identifikator *tag*, einer die Anweisung identifizierenden ganzen Zahl, belegt. Die verschickten Daten *data* können von einem anderen Prozess mit dem Identifizierer *source* durch die Anweisung *MPI\_RECV(data, count, mpi\_type, source, tag, comm, ier)* empfangen werden. Der Nachrichten-Identifikator *tag* ordnet dabei Sendeprozess und Empfangsprozess einander zu.

Es ist auch möglich das Senden von Daten *data\_a* von einem Prozess mit dem Identifizierer *source* und das Empfangen von *data\_b* von einem Prozess mit dem Identifizierer *destination* über *MPI\_SENDRECV(data\_a, count\_a, mpi\_type\_a, destination, tag\_a, data\_b, count\_b, mpi\_type\_b, destination, tag\_b, comm, status, ier)* durchzuführen. Dabei gibt *count\_a* die Anzahl der zu sendenden und *count\_b* die Anzahl der zu empfangenen Daten vom Datentyp *mpi\_type\_a* beziehungsweise *mpi\_type\_b* an. Der Nachrichten-Identifikator für das Senden ist *tag\_a* und für das Empfangen *tag\_b*.

Neben den Unterprogrammen zur Kommunikation zwischen zwei Prozessen gibt es auch die Möglichkeit, von einem Prozess die Daten *data* an alle anderen Prozesse zu ver-

teilen. Beispielsweise sendet das Unterprogramm *MPI\_BCAST(data, count, mpi\_type, root, comm, ier)* die Daten von dem Prozess mit dem Identifizierer *root* an alle Prozesse aus dem Kommunikator *comm*. Das Unterprogramm *MPI\_REDUCE(send\_data, recv\_data, count, mpi\_type, mpi\_op, root, comm, ier)* sendet die Daten *send\_data* von allen Prozessen aus dem Kommunikator *comm* zum Prozess *root*, der diese Daten empfängt und eine Reduktionsfunktion *mpi\_op* durchführt. Das Ergebnis der Reduktionsfunktion wird in der Variable *recv\_data* abgespeichert. Die Reduktionsfunktion kann zum Beispiel *mpi\_sum* für die Addition der Daten aller Prozesse oder *mpi\_max* für die Bestimmung des maximalen Werts aus den Daten der Prozesse sein. Zur Synchronisierung der Prozesse eignet sich das Unterprogramm *MPI\_BARRIER(comm, ier)*. Es blockiert alle Prozesse des Kommunikators *comm* so lange, bis alle Prozesse das Unterprogramm aufgerufen haben.

### Das Modul *subpack*

Das Modul *subpack* beinhaltet Unterprogramme zur Ausgabe des Status der Simulation. Beispielsweise gibt das Unterprogramm *clock* die Laufzeit des Programms aus.

### Das Hauptprogramm *program earth\_mag*

Das Hauptprogramm *program earth\_mag* definiert den Einstiegspunkt für den MHD-Simulationscode. Zunächst wird die Aufteilung des Simulationsgebietes in *z*-Richtung für die Prozesse der MPI über das Unterprogramm *zpara* durchgeführt. Weiterhin wird der Code über *equilout* initialisiert. Dabei wird das Unterprogramm für zwei verschiedene Felder *f* und *ff* aufgerufen, in denen jeweils die initialen physikalischen Größen abgespeichert sind. Letzteres Feld dient in der Berechnung eines Zeitschrittes dazu, den vorherigen Zeitschritt zu speichern.

Über die Option *readprevious* kann ausgewählt werden, ob durch das Unterprogramm *readdata* ein vorher abgespeichertes Simulationsergebnis eingelesen werden soll. Die Initialisierung wird dann überschrieben. Das planetare Magnetfeld wird gemäß der Parameter im Modul *constants* berechnet und anschließend hinzu addiert. Ist der Schalter *readscdata* gesetzt, wird das Unterprogramm *scdata* ausgeführt, welches Raumfahrzeugdaten einliest. Mit den Daten lassen sich die Sonnenwindbedingungen anpassen und die Kostenfunktion berechnen.

Anschließend wird im Hauptprogramm die Zeitschleife zum Lösen der MHD-Gleichungen ausgeführt. Die Zeitschleife ist im Allgemeinen zweigeteilt. Zunächst wird stets eine Zeitschleife, die den stationären Zustand berechnet, ausgeführt. Dabei wird eine bestimmte Anzahl von Zeitschritten [*stationaer*] berechnet. Ist der Schalter *readscdata* zum Einlesen von Raumfahrzeugdaten gesetzt, wird anschließend eine weitere Zeitschleife durchgeführt. Falls der Schalter *SWmodification* gesetzt ist, werden die über die eingelesenen Raumfahrzeugdaten Sonnenwinddaten in jedem Zeitschritt gemäß der eingelesenen Daten neu bestimmt.

In jedem Zeitschritt wird das Unterprogramm *difmt* und alle nötigen Unterprogramme zur Bestimmung der Randwerte des Simulationsgebietes ausgeführt. Weiterhin werden eventuelle Ausgaben von Daten realisiert. Alle 200 Zeitschritte wird das planetare Magnetfeld durch das Unterprogramm *dreh* gedreht. Außerdem wird, sofern der Schalter *costfunction* gesetzt ist, die Kostenfunktion während der Zeitschleife berechnet. Die maximale Anzahl von durchgeführten Zeitschritten ist durch *last* gegeben.



Konstante	Subsonische Simulation	Supersonische Simulation
<i>npe</i>	23	23
<i>thx</i>	0.5	0.5
<i>nx</i>	100	200
<i>ny</i>	100	150
<i>nz</i>	100	150
<i>nxp</i>	0	0
<i>xl</i>	15.2	15.2
<i>yl</i>	10.2	10.2
<i>zl</i>	10.2	10.2
<i>readprevious</i>	<i>.false.</i>	<i>.false.</i>
<i>readscdata</i>	<i>.false.</i>	<i>.false.</i>
<i>SWmodifications</i>	<i>.false.</i>	<i>.false.</i>
<i>costfunction</i>	<i>.false.</i>	<i>.false.</i>
<i>ro01</i>	<i>5.0e-4</i>	<i>5.0e-4</i>
<i>vsw</i>	<i>0.0074</i>	<i>0.044</i>
<i>po01</i>	<i>1.8e-8</i>	<i>1.8e-8</i>
<i>vmu0</i>	<i>0.001</i>	<i>0.001</i>
<i>pmu0</i>	<i>1.0</i>	<i>1.0</i>
<i>dfu0</i>	<i>1.0</i>	<i>1.0</i>
<i>ra_i</i>	<i>1.0</i>	<i>1.0</i>
<i>pos_p1</i>	<i>-3.0</i>	<i>-3.0</i>
<i>pos_p2</i>	<i>3.0</i>	<i>3.0</i>
<i>innerbrdy</i>	<i>.true.</i>	<i>.true.</i>
<i>velbrdy</i>	<i>1</i>	<i>1</i>
<i>inimod</i>	<i>4</i>	<i>4</i>

Tabelle B.1: Einstellungen für die subsonische und die supersonische Umströmung zweier Kugeln mit den Simulationsergebnissen in Abbildung 2.3. Alle das Magnetfeld betreffenden Eigenschaften sind im Simulationscode 0 beziehungsweise auf *.false.* gesetzt. Wie die kursive Schreibweise verdeutlicht, beziehen sich alle Angaben auf die Darstellung im Simulationscode, also nutzen die Normierungskonstanten aus Kapitel 2.

## B.2 Einstellungen für die MHD-Simulationen

In diesem Abschnitt werden detaillierte Informationen zu den Einstellungen der in dieser Arbeit präsentierten MHD-Simulationen angegeben. Die Einstellungen beziehen sich auf die zuvor in Anhang B.1 beschriebene numerische Implementierung des Codes und werden in Fortran-Code dargestellt. Daher sind alle Angaben physikalischer Größen auf die Normierung des Simulationscodes, wie in Kapitel 2 angegeben, normiert. Alle im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Simulationen wurden auf dem Testrechner PC-T durchgeführt.

In Kapitel 2.3 wurden die inneren Randbedingungen durch die Umströmung von zwei hintereinander liegenden Kugeln getestet. Die Ergebnisse der Simulationen sind in Abbildung 2.3 zu finden. Die zugehörigen Einstellungen des Simulationscodes für den subsonischen und den supersonischen Fall sind in Tabelle B.1 zusammengefasst. Dabei wurde

eine reine hydrodynamische Umströmung betrachtet, weshalb sowohl das Sonnenwindmagnetfeld als auch das planetare Magnetfeld 0 sind. Der Simulationscode wurde für die Betrachtung von zwei Kugeln anstatt eines Planeten modifiziert. Beide Kugeln besitzen denselben Radius  $r_p$  [ra\_i]. Der Mittelpunkt der ersten Kugel befindet sich bei  $x_{p1}$  [pos\_p1] und der Mittelpunkt der zweiten Kugel ist bei  $x_{p2}$  [pos\_p2] auf der  $x$ -Achse. Die Gitterauflösung der supersonischen Umströmung ist höher als bei der subsonischen, da sich bei der Stoßwelle der supersonischen Umströmung die physikalischen Größen auf kleinen räumlichen Skalen stark ändern.

Weiterhin wurden in Kapitel 2.3 MHD-Simulationen von der Wechselwirkung des Sonnenwindes mit dem Erdmagnetfeld präsentiert. In Abbildung 2.4 ist die stationäre Lösung einer MHD-Simulation zu sehen. Die zugehörigen Einstellungen des MHD-Simulationscodes finden sich in Tabelle B.2 in Spalte "Globale MSP". Nach dem Erreichen eines stationären Zustands wurden MHD-Simulationen mit zeitabhängigen Sonnenwindbedingungen mit THEMIS-Daten verglichen. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 2.6, 2.7, 2.8 und 2.9 dargestellt, wobei die dafür verwendeten Simulationseinstellungen in Tabelle B.2 in Spalte "Datenvergleich" angegeben sind.

Die MHD-Simulationen wurden genutzt, um die planetare Magnetfeldparameter in Kapitel 3.4 zu schätzen. Die dafür verwendeten Einstellungen des Simulationscodes sind in Tabelle B.2 in der Spalte "Parameterschätzung" zu finden. Die Anzahl der Gitterpunkte wurde im Vergleich zu den MHD-Simulationen aus Kapitel 2 reduziert, da die Parameterschätzung eine deutlich höhere Laufzeit im Vergleich zu einer einzelnen Simulation hat.

In Kapitel 3 wurde der MHD-Simulationscode benutzt, um die Parameter des planetaren Magnetfeldes aus THEMIS-Daten zu schätzen. Dabei wurde ein adjungierter Simulationscode getestet. Dieser besitzt dieselben Einstellungsmöglichkeiten wie der MHD-Simulationscode. Für einen ersten Test wurden die Gradienten des adjungierten Simulationscodes mit den über finite Differenzen berechneten Gradienten in Abbildung 3.1 verglichen. Die Einstellungen der dafür nötigen MHD-Simulationen sind in Tabelle B.3 in Spalte "∇-Vergleich" zu finden. Für die Schätzung der planetaren Magnetfeldparameter aus den THEMIS-Daten mit den Ergebnissen in Abbildung 3.5 und 3.6 wurden MHD-Simulationen mit den Einstellungen aus Tabelle B.3 aus Spalte "Schätzung plan. Mag." verwendet.

In Kapitel 4.6 wurde der MHD-Simulationscode mit den Ergebnissen des Reihenentwicklungsmodells verglichen. Die Ergebnisse des Vergleichs für typische Sonnenwindbedingungen sind in Abbildung 9.1 dargestellt. Die zugehörigen Einstellungen der MHD-Simulation sind in Tabelle B.4 in Spalte "Vergleich" zusammengetragen. Vor dem Hintergrund des Vergleiches der beiden Modelle wurden auch die Auswirkungen einiger numerischer Parameter des MHD-Simulationscodes untersucht. Die Ergebnisse für den Parameter der dynamischen Viskosität  $D_v$  sind in Abbildung 4.16 gezeigt. Weiterhin wurde der Parameter der magnetischen Diffusion  $D_B$  getestet, wobei die Ergebnisse in Abbildung 4.15 zu sehen sind. Die Einstellungen der zugehörigen MHD-Simulationen für die Betrachtungen der Parameter  $D_v$  und  $D_B$  sind in Tabelle B.4 zusammengetragen.

In Kapitel 9 wurde die Projektionsabbildung eingeführt. Dabei wurde eine MHD-Simulation zu den Sonnenwindbedingungen aus Tabelle 1.1 als Basislösung verwendet. Die Einstellungen dieser Simulation sind in Tabelle B.4 in Spalte "Vergleich" zu finden. Dabei wurde für die  $z$ -Komponente der Wert  $1.92e-4$  genutzt.

Konstante	Globale MSP	Datenvergleich	Parameterschätzung
<i>npe</i>	23	23	23
<i>thx</i>	1.0	1.0	1.0
<i>nx</i>	200	200	150
<i>ny</i>	200	150	100
<i>nz</i>	200	150	200
<i>nxp</i>	40	0	0
<i>xl</i>	80.2	50.2	50.2
<i>yl</i>	90.2	60.2	60.2
<i>zl</i>	90.2	60.2	60.2
<i>readprevious</i>	.false.	.false.	.false.
<i>readscdata</i>	.false.	.true.	.true.
<i>SWmodifications</i>	.false.	.true.	.true.
<i>costfunction</i>	.false.	.false.	.true.
<i>ro01</i>	7.5e-4	aus SW Datei	aus SW Datei
<i>vsw</i>	5.88e-2	aus SW Datei	aus SW Datei
<i>po01</i>	1.3e-8	aus SW Datei	aus SW Datei
<i>imfx</i>	0.0	aus SW Datei	aus SW Datei
<i>imfy</i>	0.0	aus SW Datei	aus SW Datei
<i>imfz</i>	0.0	aus SW Datei	aus SW Datei
<i>b0x</i>	0.0	-0.05	variabel
<i>b0y</i>	0.0	0.158	variabel
<i>b0z</i>	-1.0	-0.944	variabel
<i>Qxx</i>	0.0	0.0	0.0
<i>Qxy</i>	0.0	0.0	0.0
<i>Qxz</i>	0.0	0.0	0.0
<i>Qyy</i>	0.0	0.0	0.0
<i>Qyz</i>	0.0	0.0	0.0
<i>turnB</i>	.false.	.true.	.true.
<i>phi</i>	0.0	aus SW Datei	aus SW Datei
<i>theta</i>	0.0	angepasst	angepasst
<i>vmu0</i>	0.001	0.001	0.001
<i>pmu0</i>	1.0	1.0	1.0
<i>dfu0</i>	1.0	1.0	1.0
<i>eatt</i>	0.001	0.001	0.001
<i>ra_i</i>	4.0	4.0	4.0
<i>innerbrdy</i>	.true.	.true.	.true.
<i>velbrdy</i>	2	2	2
<i>innerB</i>	.false.	.false.	.false.
<i>inimod</i>	3	4	4

Tabelle B.2: Einstellungen für die MHD-Simulationen der Erde aus Kapitel 2.3 und 3.4. Dabei bedeutet “aus SW Datei”, dass Raumfahrzeugdaten zur passenden Simulationszeit und “angepasst”, dass ein Mittelwert aus Raumfahrzeugdaten verwendet werden. Weiterhin bedeutet “variabel”, dass die Werte über eine Minimierung der Kostenfunktion angepasst werden.

Konstante	$\nabla$ -Vergleich	Schätzung plan. Mag.
<i>npe</i>	22	23
<i>thx</i>	2.5	1.0
<i>nx</i>	100	150
<i>ny</i>	100	100
<i>nz</i>	100	100
<i>nxp</i>	0	0
<i>xl</i>	40.2	50.2
<i>yl</i>	45.2	60.2
<i>zl</i>	45.2	60.2
<i>readprevious</i>	.false.	.false.
<i>readscdata</i>	.false.	.true.
<i>SWmodifications</i>	.false.	.true.
<i>costfunction</i>	.false.	.true.
<i>ro01</i>	5.0e-4	aus SW Datei
<i>vsw</i>	5.88e-2	aus SW Datei
<i>po01</i>	1.3e-8	aus SW Datei
<i>imfx</i>	0.0	aus SW Datei
<i>imfy</i>	0.0	aus SW Datei
<i>imfz</i>	0.0	aus SW Datei
<i>turnB</i>	.false.	.true.
<i>phi</i>	0.0	aus SW Datei
<i>theta</i>	0.0	angepasst
<i>vmu0</i>	0.002	0.001
<i>pmu0</i>	1.0	1.0
<i>dfu0</i>	1.0	1.0
<i>eatt</i>	0.001	0.001
<i>ra_i</i>	4.0	4.0
<i>innerbrdy</i>	.true.	.true.
<i>velbrdy</i>	2	2
<i>innerB</i>	.false.	.false.
<i>inimod</i>	3	3

Tabelle B.3: Einstellungen für die MHD-Simulationen im Rahmen der Schätzung der planetaren Magnetfeldparameter aus Kapitel 3.

Konstante	Vergleich	$D_B$ -Simulation	$D_v$ -Simulation
<i>npe</i>	23	23	23
<i>thx</i>	1.5	1.5	1.0
<i>nx</i>	300	300	300
<i>ny</i>	300	150	150
<i>nz</i>	300	300	300
<i>nxp</i>	0	0	0
<i>xl</i>	50.2	50.2	50.2
<i>yl</i>	60.2	60.2	60.2
<i>zl</i>	60.2	60.2	60.2
<i>readprevious</i>	.false.	.false.	.false.
<i>readscdata</i>	.false.	.false.	.false.
<i>SWmodifications</i>	.false.	.false.	.false.
<i>costfunction</i>	.false.	.false.	.false.
<i>ro01</i>	7.0e-4	7.0e-4	7.0e-4
<i>vsw</i>	6.32e-2	6.32e-2	6.32e-2
<i>po01</i>	1.3e-8	1.3e-8	1.3e-8
<i>imfx</i>	0.0	0.0	0.0
<i>imfy</i>	0.0	0.0	0.0
<i>imfz</i>	0.0, 1.92e-4	0.0	0.0
<i>b0x</i>	0.0	0.0	0.0
<i>b0y</i>	0.0	0.0	0.0
<i>b0z</i>	-1.0	-1.0	-1.0
<i>Qxx</i>	0.0	0.0	0.0
<i>Qxy</i>	0.0	0.0	0.0
<i>Qxz</i>	0.0	0.0	0.0
<i>Qyy</i>	0.0	0.0	0.0
<i>Qyz</i>	0.0	0.0	0.0
<i>turnB</i>	.false.	.false.	.false.
<i>phi</i>	0.0	0.0	0.0
<i>theta</i>	0.0	0.0	0.0
<i>vmu0</i>	0.001	0.001	5.0e-4,0.001,0.002,0.004
<i>pmu0</i>	1.0	1.0	1.0
<i>dfu0</i>	1.0	1.0	1.0
<i>eatt</i>	0.001	5.0e-4,0.001,0.002,0.004	0.001
<i>ra_i</i>	4.0	4.0	4.0
<i>innerbrdy</i>	.true.	.true.	.true.
<i>velbrdy</i>	2	2	2
<i>innerB</i>	.false.	.false.	.false.
<i>inimod</i>	3	3	3

Tabelle B.4: Einstellungen für die MHD-Simulationen aus Kapitel 4.6. Die Einstellungen aus Spalte “Vergleich” wurden auch für die Projektionsabbildung in Kapitel 9 verwendet.



## C Gradientenberechnung mit einem Quasi-Newton-Verfahren

In Kapitel 3.1 wurde die Kostenfunktion (3.3) eingeführt, die über ein Quasi-Newton-Verfahren bezüglich der Parameter  $\vec{s}$  minimiert wurde. Die Kostenfunktion  $K(\vec{s})$  kann durch eine Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung um einen Punkt  $\vec{s}_k$  im Parameter-raum angenähert werden:

$$K(\vec{s}) \approx K(\vec{s}_k) + (\vec{s} - \vec{s}_k) \cdot \partial_{\vec{s}} K(\vec{s}_k) + \frac{1}{2} (\vec{s} - \vec{s}_k)^T \cdot \mathbf{H} \cdot (\vec{s} - \vec{s}_k). \quad (\text{C.1})$$

Hierbei ist  $\partial_{\vec{s}}$  der Gradient der partiellen Ableitungen nach allen Parametern aus  $\vec{s}$  und  $\mathbf{H}$  die Hesse-Matrix, welche die zweiten Ableitungen von  $K$  nach  $\vec{s}$  bei  $\vec{s}_k$  enthält. Nach der Reihenentwicklung (C.1) ergibt sich der Gradient der Kostenfunktion zu

$$\partial_{\vec{s}} K(\vec{s}) \approx \partial_{\vec{s}} K(\vec{s}_k) + \mathbf{H} \cdot (\vec{s} - \vec{s}_k). \quad (\text{C.2})$$

Die notwendige Bedingung eines verschwindenden Gradienten im Minimum ergibt für die Kostenfunktion nach Approximation (C.1)

$$\vec{s}_{\min} \approx \vec{s}_k - \mathbf{H}^{-1} \cdot \partial_{\vec{s}} K(\vec{s}_k). \quad (\text{C.3})$$

Allgemein müssen auch höhere Ordnungen der Kostenfunktion in Darstellung (C.1) einbezogen werden. Daher ergibt sich im Allgemeinen für  $\vec{s}_{\min}$  nicht das Minimum der Kostenfunktion, sondern lediglich ein Wert, der näher am Minimum liegt als  $\vec{s}_k$ . Daraus lässt sich folgende Iteration zu einem Minimum bestimmen:

$$\vec{s}_{k+1} = \vec{s}_k - \mathbf{H}^{-1} \cdot \partial_{\vec{s}} K(\vec{s}_k). \quad (\text{C.4})$$

Mit dieser Iterationsgleichung kann dann für  $k \rightarrow \infty$  ein Minimum der Kostenfunktion berechnet werden.

Allerdings ist es zum einen oftmals numerisch aufwändig die Hesse-Matrix zu berechnen, zum anderen muss die Hesse-Matrix positiv definit sein, um ein Minimum zu erreichen. Weit weg vom Minimum ist die Hesse-Matrix jedoch nicht notwendigerweise positiv definit. Eine Lösung dieser Probleme lässt sich erreichen, indem die exakte Hesse-Matrix  $\mathbf{H}$  durch eine stets positiv definite Approximation  $\mathbf{H}_k$  angenähert wird, welche sich mit den Iterationsschritten  $k$  zum Auffinden des Minimums der Kostenfunktion an die Hesse-Matrix iterativ annähert, sodass  $\mathbf{H} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{H}_k$  gilt. Verfahren dieser Art werden als Quasi-Newton-Verfahren bezeichnet.

Werden beide Punkte  $\vec{s}_k$  und  $\vec{s}_{k+1}$  im Parameterraum über Gleichung (C.2) betrachtet, ergibt sich durch Differenzbildung

$$\vec{s}_{k+1} - \vec{s}_k \approx \mathbf{H}_{k+1}^{-1} \cdot (\nabla_{\vec{s}} K(\vec{s}_{k+1}) - \nabla_{\vec{s}} K(\vec{s}_k)). \quad (\text{C.5})$$

Dabei wurde die Hesse-Matrix für beide Fälle durch  $\mathbf{H}_{k+1}$  approximiert, weil diese Näherung der Hesse-Matrix für ein größeres  $k$  besser ist. Es sei bemerkt, dass hier der Gradient  $\nabla_{\vec{s}} K(\vec{s}_{k+1})$  im Gegensatz zu Ausdruck (C.4) auftritt, da die Iteration  $k \rightarrow k+1$  der Bedingung eines verschwindenden Gradienten näher kommt, aber im Allgemeinen bei Iterationsschritt  $k+1$  noch nicht erreicht wurde. Mit der Bedingungen einer positiv definiten Matrix  $\mathbf{H}_{k+1}$ , welche Gleichung (C.5) erfüllen soll, lassen sich verschiedene Iterationsgleichungen für die Hesse-Matrix  $\mathbf{H}_{k+1}$  angeben.

In dieser Arbeit wird die Methode nach Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno (BFGS) verwendet, wie sie bei Press et al. (1992) beschrieben ist. Dabei ist die Iteration der inversen Matrix  $\mathbf{H}_{k+1}^{-1}$  gegeben durch

$$\mathbf{H}_{k+1}^{-1} = \left( \mathbf{I} - \frac{\Delta \vec{s}_k \cdot \Delta \vec{g}_k^T}{\Delta \vec{g}_k^T \cdot \Delta \vec{s}_k} \right) \mathbf{H}_k^{-1} \left( \mathbf{I} - \frac{\Delta \vec{g}_k \cdot \Delta \vec{s}_k^T}{\Delta \vec{g}_k^T \cdot \Delta \vec{s}_k} \right) + \frac{\Delta \vec{s}_k \cdot \Delta \vec{s}_k^T}{\Delta \vec{g}_k^T \cdot \Delta \vec{s}_k}, \quad (\text{C.6})$$

mit der Einheitsmatrix  $\mathbf{I}$  und der Schrittweite im Parameterraum  $\Delta \vec{s} := \vec{s}_{k+1} - \vec{s}_k$  sowie der Differenz der Gradienten  $\Delta \vec{g}_k := \partial_{\vec{s}} K(\vec{s}_{k+1}) - \nabla_{\vec{s}} K(\vec{s}_k)$ .

Die Schrittweite eines Quasi-Newton-Verfahrens ist durch Gleichung (C.4) festgelegt. Zur Bestimmung der Schrittweite wurde eine Taylorreihe bis zur zweiten Ordnung der Kostenfunktion verwendet. Allerdings ist diese Darstellung weit weg vom Minimum nicht notwendigerweise ausreichend. Daher ist es oftmals sinnvoll, die Schrittweite durch ein Liniensuchverfahren anzupassen (Press et al. 1992). Dabei wird die Schrittweite nach Gleichung (C.4) durch einen Faktor  $a_{\text{LS}}$  skaliert:

$$\vec{s}_{k+1} = \vec{s}_k + a_{\text{LS}} \vec{p}_{\text{LS}}, \quad (\text{C.7})$$

wobei  $\vec{p}_{\text{LS}} := -\mathbf{H}_k^{-1} \cdot \partial_{\vec{s}} K(\vec{s}_k)$  ist. Der Wert der Kostenfunktion in Abhängigkeit von der Schrittweite  $a_{\text{LS}}$  wird definiert über

$$\tilde{K}(a_{\text{LS}}) := K(\vec{s}_k + a_{\text{LS}} \vec{p}_{\text{LS}}). \quad (\text{C.8})$$

Zunächst wird  $a_{\text{LS}} = 1$  gesetzt, was der vollen Schrittweite im Quasi-Newton-Verfahren entspricht.

Mit den bereits berechneten Werten für die Kostenfunktion am Ausgangspunkt  $\tilde{K}(0)$ , den Gradienten  $\partial_{a_{\text{LS}}} \tilde{K}(a_{\text{LS}})|_{a_{\text{LS}}=0}$  und dem Wert der Kostenfunktion nach dem ersten Iterationsschritt  $\tilde{K}(1)$  lässt sich  $\tilde{K}(a_{\text{LS}})$  durch folgenden quadratischer Ansatz annähern:

$$\tilde{K}(a_{\text{LS}}) \approx a_{\text{LS}}^2 \left( \tilde{K}(1) - \tilde{K}(0) - \partial_{a_{\text{LS}}} \tilde{K}(0) \right) + a_{\text{LS}} \partial_{a_{\text{LS}}} \tilde{K}(0) + \tilde{K}(0). \quad (\text{C.9})$$

Da die Kostenfunktion entlang der Richtung  $\vec{p}_{\text{LS}}$  minimiert werden soll, ergibt sich über  $\partial_{a_{\text{LS}}} \tilde{K}(a_{\text{LS}})|_{a_{\text{LS}}=a_{\text{LS,neu}}} = 0$  mit Gleichung (C.9) ein neuer Wert  $a_{\text{LS,neu}}$  für  $a_{\text{LS}}$ . Der neue Wert ersetzt dann den vorherigen:  $a_{\text{LS}} \leftarrow a_{\text{LS,neu}}$ .

Anschließend wird die Kostenfunktion (C.8) mit dem neuen Wert für  $a_{\text{LS}}$  berechnet. Für jede neue Verbesserung von  $a_{\text{LS}}$  wird dann eine kubische Näherung für  $\tilde{K}(a_{\text{LS}})$



anstatt Gleichung (C.9) verwendet, welche aus den zwei letzten bestimmten Werten für die Kostenfunktion (C.8) sowie  $\tilde{K}(0)$  und  $\partial_{a_{LS}} \tilde{K}(0)$  berechnet wird. Über die Bedingung  $\partial_{a_{LS}} \tilde{K}(a_{LS}) = 0$  lässt sich so stets eine Verbesserung für  $a_{LS}$  bestimmen.

Im Algorithmus nach Press et al. (1992) wird ein neuer Wert  $a_{LS,neu}$  beschränkt durch den vorherigen Wert  $a_{LS,alt}$  für  $a_{LS}$  durch  $0.1 a_{LS,alt} < a_{LS} < 0.5 a_{LS,alt}$ . Die Schrittweitanpassung wird beendet, falls

$$K(\vec{s}_{k+1}) \leq K(\vec{s}_k) + \alpha_W \partial_{\vec{s}} K(\vec{s}_k) \cdot (\vec{s}_{k+1} - \vec{s}_k), \quad (C.10)$$

wobei der Wert  $\alpha_W = 10^{-4}$  ist.



# Literaturverzeichnis

- Achterberg, A., 1987, A numerical study of steady-state shock acceleration, *Astronomy and Astrophysics*, 174, 329–337
- Alexeev, I. I., 1986, The penetration of interplanetary magnetic and electric fields into the magnetosphere, *Journal of geomagnetism and geoelectricity*, 38, 1199–1221
- Alexeev, I. I., Belenkaya, E. S., Slavin, J. A., Korth, H., Anderson, B. J., Baker, D. N., Boardsen, S. A., Johnson, C. L., Purucker, M. E., Sarantos, M., Solomon, S. C., 2010, Mercury's magnetospheric magnetic field after the first two MESSENGER flybys, *Icarus*, 209, 23–39
- Alfvén, H., 1942, Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves, *Nature*, 150, 405–406
- Andreasen, G. K., 1997, Reconstruction of past solar wind variations: Inversion of the geomagnetic response at Godhavn, *Journal of Geophysical Research*, 102, 7025–7036
- Angelopoulos, V., 2008, The THEMIS Mission, *Space Science Review*, 141, 5–34
- Aubry, M. P., Russell, C. T., Kivelson, M. G., 1970, Inward motion of the magnetopause before a substorm, *Journal of Geophysical Research*, 75, 7018–7031
- Auster, H. U., Glassmeier, K. H., Magnes, W., Aydogar, O., Baumjohann, W., Constantinescu, D., Fischer, D., Fornacon, K. H., Georgescu, E., Harvey, P., Hillenmaier, O., Kroth, R., Ludlam, M., Narita, Y., Nakamura, R., Okrafka, K., Plaschke, F., Richter, I., Schwarzl, H., Stoll, B., Valavanoglou, A., Wiedemann, M., 2008, The THEMIS Fluxgate Magnetometer, *Space Science Review*, 141, 235–264
- Becker, P. A., Kazanas, D., 2001, Exact Expressions for the Critical Mach Numbers in the Two-Fluid Model of Cosmic-Ray-modified Shocks, *The Astrophysical Journal*, 546, 429–446
- Bellan, P. M., 2008, *Fundamentals of Plasma Physics*, Cambridge University Press, Cambridge
- Benkhoff, J., van Casteren, J., Hayakawa, H., Fujimoto, M., Laakso, H., Novara, M., Ferri, P., Middleton, H. R., Ziethe, R., 2010, BepiColombo - Comprehensive exploration of Mercury: Mission overview and science goals, *Planetary and Space Science*, 58, 2–20

- Bennett, L., Kivelson, M. G., Khurana, K. K., Frank, L. A., Paterson, W. R., 1997, A model of the Earth's distant bow shock, *Journal of Geophysical Research*, 102, 26 927–26 942
- Berchem, J., Russell, C. T., 1982, The thickness of the magnetopause current layer - ISEE 1 and 2 observations, *Journal of Geophysical Research*, 87, 2108–2114
- Biermann, L., 1951, Kometenschweife und solare Korpuskularstrahlung, *Zeitschrift für Astrophysik*, 29, 274–286
- Biernat, H. K., Erkaev, N. V., Farrugia, C. J., 1999, Aspects of MHD flow about Venus, *Journal of Geophysical Research*, 104, 12 617–12 626
- Burgess, D., Scholer, M., 2015, *Collisionless shocks in space plasmas: structure and accelerated particles*, Cambridge University Press, Cambridge
- Campbell, W., 2001, *Earth Magnetism: A Guided Tour Through Magnetic Fields*, Complementary science series, Harcourt Academic Press, San Diego
- Chapman, S., 1954, The Viscosity and Thermal Conductivity of a Completely Ionized Gas, *Astrophysical Journal*, 120, 151–155
- Chapman, S., Bartels, J., 1940, *Geomagnetism Vol. 1*, Clarendon Press, Oxford
- Chapman, S., Ferraro, V. C. A., 1930, A New Theory of Magnetic Storms, *Natur*, 126, 129–130
- Christensen, U. R., 2006, A deep dynamo generating Mercury's magnetic field, *Natur*, 444, 1056–1058
- Clauser, C., 2016, *Einführung in die Geophysik*, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg
- Courant, R., Friedrichs, K., Lewy, H., 1928, Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, *Mathematische Annalen*, 100, 32–74
- Crooker, N. U., Eastman, T. E., Stiles, G. S., 1979, Observations of plasma depletion in the magnetosheath at the dayside magnetopause, *Journal of Geophysical Research*, 84, 869–874
- de Toma, G., 2011, Evolution of Coronal Holes and Implications for the High-Speed Solar Wind During the Minimum Between Cycles 23 and 24, *Solar Physics*, 274, 195–217
- Dibraccio, G. A., Slavin, J. A., Boardsen, S. A., Anderson, B. J., Korth, H., Zurbuchen, T. H., Raines, J. M., Baker, D. N., McNutt, R. L., Solomon, S. C., 2013, MESSENGER observations of magnetopause structure and dynamics at Mercury, *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, 118, 997–1008
- Erkaev, N. V., 1988, Results of research on MHD flow past the magnetosphere (Review), *Geomagnetism and Aeronomy*, 28, 529–541

- Erkaev, N. V., Farrugia, C. J., Biernat, H. K., 1996, Effects on the Jovian magnetosheath arising from solar wind flow around nonaxisymmetric bodies, *Journal of Geophysical Research*, 101, 10 665–10 672
- Erkaev, N. V., Biernat, H. K., Farrugia, C. J., 2000, Ideal magnetohydrodynamic flow around a blunt body under anisotropic pressure, *Physics of Plasmas*, 7, 3413–3420
- Erkaev, N. V., Farrugia, C. J., Biernat, H. K., 2003, The role of the magnetic barrier in the Solar wind-magnetosphere interaction, *Planetary and Space Science*, 51, 745–755
- Fairfield, D. H., 1971, Average and unusual locations of the Earth's magnetopause and bow shock, *Journal of Geophysical Research*, 76, 6700–6716
- Farris, M. H., Russell, C. T., 1994, Determining the standoff distance of the bow shock: Mach number dependence and use of models, *Journal of Geophysical Research*, 99, 17 681–17 689
- Farrugia, C. J., Erkaev, N. V., Biernat, H. K., Lawrence, G. R., Elphic, R. C., 1997, Plasma depletion layer model for low Alfvén Mach number: Comparison with ISEE observations, *Journal of Geophysical Research*, 102, 11 315–11 324
- Farrugia, C. J., Biernat, H. K., Erkaev, N. V., Kistler, L. M., Le, G., Russell, C. T., 1998, MHD model of magnetosheath flow: comparison with AMPTE/IRM observations on 24 October, 1985, *Annales Geophysicae*, 16, 518–527
- Feldman, U., Landi, E., Schwadron, N. A., 2005, On the sources of fast and slow solar wind, *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, 110, A07109
- Fichtner, A., Bunge, H.-P., Igel, H., 2006, The adjoint method in seismology: I - Theory, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 157, 86–104
- Finlay, C. C., Maus, S., Beggan, C. D., Bondar, T. N., Chambodut, A., Chernova, T. A., Chulliat, A., Golovkov, V. P., Hamilton, B., Hamoudi, M., Holme, R., Hulot, G., Kuang, W., Langlais, B., Lesur, V., Lowes, F. J., Lühr, H., MacMillan, S., Manda, M., McLean, S., Manoj, C., Menvielle, M., Michaelis, I., Olsen, N., Rauberg, J., Rother, M., Sabaka, T. J., Tangborn, A., Tøffner-Clausen, L., Thébaud, E., Thomson, A. W. P., Wardinski, I., Wei, Z., Zvereva, T. I., 2010, International Geomagnetic Reference Field: the eleventh generation, *Geophysical Journal International*, 183, 1216–1230
- Gauss, C. F., 1839, Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus, in *Resultate aus den Beobachtungen des Magnetischen Vereins im Jahre 1838*, (Hg.) C. F. Gauss, W. Weber, S. 1–59, Göttinger Magnetischer Verein, Leipzig
- Gauss, C. F., Haase, C., 1865, Theorie der Bewegung der Himmelskörper welche in Kegelschnitten die Sonne umlaufen, Carl Meyer, Hannover
- Gauss, K. F., 1809, *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*, Perthes - Besser, Hamburg
- Giering, R., Kaminski, 2003, Applying TAF to generate efficient derivative code of Fortran 77-95 programs, *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 2, 54–57

- Giles, M. B., Pierce, N. A., 2000, An Introduction to the Adjoint Approach to Design, Flow, Turbulence and Combustion, 65, 393–415
- Glassmeier, K.-H., 2000, Currents in Mercury's Magnetosphere, in Magnetospheric Current Systems, Geophysical Monograph 118, S. 371–380, American Geophysical Union, Washington DC
- Glassmeier, K.-H., Tsurutani, B. T., 2014, Carl Friedrich Gauss - General Theory of Terrestrial Magnetism - a revised translation of the German text, History of Geo- and Space Sciences, 5, 11–62
- Glassmeier, K.-H., Auster, H.-U., Motschmann, U., 2007a, A feedback dynamo generating Mercury's magnetic field, Geophysical Research Letters, 34, L22201
- Glassmeier, K.-H., Grosser, J., Auster, U., Constantinescu, D., Narita, Y., Stellmach, S., 2007b, Electromagnetic Induction Effects and Dynamo Action in the Hermean System, Space Science Reviews, 132, 511–527
- Goedbloed, J. P. H., Poedts, S., 2004, Principles of Magnetohydrodynamics, Cambridge University Press, Cambridge
- Gropp, W., Lusk, E., Skjellum, A., 1999, Using MPI: Portable Programming with the Message-Passing Interface, MIT Press, Cambridge
- Grosser, J., Glassmeier, K.-H., Stadelmann, A., 2004, Induced magnetic field effects at planet Mercury, Planetary and Space Science, 52, 1251–1260
- Hapgood, M. A., 1992, Space physics coordinate transformations - A user guide, Planetary and Space Science, 40, 711–717
- Hapgood, M. A., 1997, Corrigendum: Space Physics coordinate transformations: a user guide, Planetary and Space Science, 45, 1047
- Hauck, S. A., Margot, J.-L., Solomon, S. C., Phillips, R. J., Johnson, C. L., Lemoine, F. G., Mazarico, E., McCoy, T. J., Padovan, S., Peale, S. J., Perry, M. E., Smith, D. E., Zuber, M. T., 2013, The curious case of Mercury's internal structure, Journal of Geophysical Research (Planets), 118, 1204–1220
- Heyner, D., Wicht, J., Gómez-Pérez, N., Schmitt, D., Auster, H.-U., Glassmeier, K.-H., 2011, Evidence from Numerical Experiments for a Feedback Dynamo Generating Mercury's Magnetic Field, Science, 334, 1690–1693
- Heyner, D., Nabert, C., Liebert, E., Glassmeier, K.-H., 2016, Concerning reconnection-induction balance at the magnetopause of Mercury, Journal of Geophysical Research (Space Physics), 121, 2935–2961
- Hill, T. W., Rassbach, M. E., 1975, Interplanetary magnetic field direction and the configuration of the day side magnetosphere, Journal of Geophysical Research, 80, 1–6
- Hood, L., Schubert, G., 1979, Inhibition of solar wind impingement on Mercury by planetary induction currents, Journal of Geophysical Research, 84, 2641–2647

- Jameson, A., 1988, Aerodynamic design via control theory, *Journal of Scientific Computing*, 3, 233–260
- Jia, X., Slavin, J. A., Gombosi, T. I., Daldorff, L. K. S., Toth, G., Holst, B., 2015, Global MHD simulations of Mercury’s magnetosphere with coupled planetary interior: Induction effect of the planetary conducting core on the global interaction, *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, 120, 4763–4775
- Johnson, C. L., Purucker, M. E., Korth, H., Anderson, B. J., Winslow, R. M., Al Asad, M. M. H., Slavin, J. A., Alexeev, I. I., Phillips, R. J., Zuber, M. T., Solomon, S. C., 2012, MESSENGER observations of Mercury’s magnetic field structure, *Journal of Geophysical Research (Planets)*, 117, E00L14
- Kertz, W., 1995, Einführung in die Geophysik: Vol. 1, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg
- King, J. H., Papitashvili, N. E., 2005, Solar wind spatial scales in and comparisons of hourly Wind and ACE plasma and magnetic field data, *Journal of Geophysical Research*, 110, A02104
- Kivelson, M. G., Russell, C. T., 1995, Introduction to Space Physics, Cambridge University Press, Cambridge
- Ko, C. M., Chan, K. W., Webb, G. M., 1997, Cosmic-ray modified shocks with injection in the hydrodynamic approach. Part 1. Injection linear in the thermal pressure, *Journal of Plasma Physics*, 57, 677–694
- Kondrashov, D., Denton, R., Shprits, Y. Y., Singer, H. J., 2014, Reconstruction of gaps in the past history of solar wind parameters, *Geophysical Research Letters*, 41, 2702–2707
- Korth, H., J. Anderson, B., Acuña, M. H., Slavin, J. A., Tsyganenko, N. A., Solomon, S. C., McNutt, R. L., 2004, Determination of the properties of Mercury’s magnetic field by the MESSENGER mission, *Planetary and Space Science*, 52, 733–746
- Kovner, M. S., Feldstein, Y. I., 1973, On solar wind interaction with the earth’s magnetosphere, *Planetary and Space Science*, 21, 1191–1211
- Landau, L., Lifshits, E., 1959, Fluid Mechanics, Pergamon Press, London
- Lax, P., Wendroff, B., 1960, Systems of conservation laws, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13, 217–237
- Lees, L., 1964, Interaction between the solar plasma wind and the geomagnetic cavity, *The American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 2, 1576–1582
- Legendre, A. M., 1806, Nouvelles Methodes pour la determination des Orbites des Cometes, Firmin Didot, Paris

- Liebert, E., Nabert, C., Perschke, C., Fornaçon, K.-F., Glassmeier, K.-H., 2016, Statistical survey of day-side magnetospheric current flow using Cluster observations: Magnetopause, eingereicht bei: *Annales Geophysicae*
- Maltsev, I. P., Liatskii, V. B., 1975, Field-aligned currents and erosion of the dayside magnetosphere, *Planetary and Space Science*, 23, 1257–1260
- Margot, J. L., Peale, S. J., Jurgens, R. F., Slade, M. A., Holin, I. V., 2007, Large Longitude Libration of Mercury Reveals a Molten Core, *Science*, 316, 710–714
- McFadden, J. P., Carlson, C. W., Larson, D., Ludlam, M., Abiad, R., Elliott, B., Turin, P., Marckwordt, M., Angelopoulos, V., 2008, The THEMIS ESA Plasma Instrument and In-flight Calibration, *Space Science Review*, 141, 277–302
- McNamara, A., Treuille, A., Popović, Z., Stam, J., 2004, Fluid control using the adjoint method, *ACM Transactions on Graphics*, 23, 449–456
- Mead, G. D., Beard, D. B., 1964, Shape of the Geomagnetic Field Solar Wind Boundary, *Journal of Geophysical Research*, 69, 1169–1179
- Meador, C. A., Martins, J. R. R. A., 2012, Derivatives for Time-Spectral Computational Fluid Dynamics Using an Automatic Differentiation Adjoint, *The American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 50, 2809–2819
- Merrill, R. T., McElhinny, M. W., 1983, The earth's magnetic field. Its history, origin and planetary perspective., Academic Press, London
- Moffatt, H. K., 1978, Magnetic field generation in electrically conducting fluids, Cambridge University Press, Cambridge
- Nabert, C., 2011, A Gas Dynamic Magnetopause Transition Observed by THEMIS, Masterarbeit, Technische Universität Braunschweig, Braunschweig
- Nabert, C., Glassmeier, K.-H., 2016a, The influence of resistivity gradients on shock conditions for a Petschek reconnection geometry, *Annales Geophysicae*, 34, 421–425
- Nabert, C., Glassmeier, K.-H., 2016b, Estimating the plasma resistivity with a reduced MHD model of magnetic diffusion, eingereicht bei: *Annales Geophysicae*
- Nabert, C., Glassmeier, K.-H., Plaschke, F., 2013, A new method for solving the MHD equations in the magnetosheath, *Annales Geophysicae*, 31, 419–437
- Nabert, C., Othmer, C., Glassmeier, K.-H., 2015, Solar wind reconstruction from magnetosheath data using an adjoint approach, *Annales Geophysicae*, 33, 1513–1524
- Nabert, C., Heyner, D., Glassmeier, K.-H., 2016a, Estimation of a planetary magnetic field using a reduced MHD model, eingereicht bei: *Annales Geophysicae*
- Nabert, C., Othmer, C., Glassmeier, K.-H., 2016b, Estimating a planetary magnetic field with time-dependent global MHD simulations using an adjoint approach, eingereicht bei: *Annales Geophysicae*



- Nagatsuma, T., Kataoka, R., Kunitake, M., 2015, Estimating the solar wind conditions during an extreme geomagnetic storm: a case study of the event that occurred on March 13-14, 1989, *Earth, Planets, and Space*, 67, 78
- Nautical Almanac Office, 1989, *Almanac for Computers*, United States Naval Observatory, Washington
- Ness, N. F., Behannon, K. W., Lepping, R. P., Whang, Y. C., Schatten, K. H., 1974, Magnetic Field Observations near Mercury: Preliminary Results from Mariner 10, *Science*, 185, 151–160
- Ness, N. F., Behannon, K. W., Lepping, R. P., Whang, Y. C., 1975, The magnetic field of Mercury. I, *Journal of Geophysical Research*, 80, 2708–2716
- Ogino, T., 1986, A three-dimensional MHD simulation of the interaction of the solar wind with the earth's magnetosphere - The generation of field-aligned currents, *Journal of Geophysical Research*, 91, 6791–6806
- Ogino, T., 1993, Two-Dimensional MHD Code, in *Computer Space Plasma Physics: Simulation Techniques and Software*, (Hg.) H. Matsumoto, Y. Omura, S. 161–207, Terra Scientific Publishing Company, Tokyo
- Ogino, T., Walker, R. J., Ashour-Abdalla, M., Dawson, J. M., 1985, An MHD simulation of By-dependent magnetospheric convection and field-aligned currents during northward IMF, *Journal of Geophysical Research*, 90, 10 835–10 842
- Olsen, N., Glassmeier, K.-H., Jia, X., 2010, Separation of the Magnetic Field into External and Internal Parts, *Space Science Reviews*, 152, 135–157
- Othmer, C., 2008, A continuous adjoint formulation for the computation of topological and surface sensitivities of ducted flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 58, 861–877
- Othmer, C., 2014, Adjoint methods for car aerodynamics, *Journal of Mathematics in Industry*, 4, 6
- Parker, E. N., 1957, Sweet's Mechanism for Merging Magnetic Fields in Conducting Fluids, *Journal of Geophysical Research*, 62, 509–520
- Parker, E. N., 1958, Dynamics of the Interplanetary Gas and Magnetic Fields, *Astrophysical Journal*, 128, 664–676
- Petrinec, S. M., Russell, C. T., 1997, Hydrodynamic and MHD Equations across the Bow Shock and Along the Surfaces of Planetary Obstacles, *Space Science Reviews*, 79, 757–791
- Petschek, H. E., 1964, Magnetic Field Annihilation, *NASA Special Publication*, 50, 425–439

- Powell, K. G., Roe, P. L., Linde, T. J., Gombosi, T. I., De Zeeuw, D. L., 1999, A Solution-Adaptive Upwind Scheme for Ideal Magnetohydrodynamics, *Journal of Computational Physics*, 154, 284–309
- Pozzo, M., Davies, C., Gubbins, D., Alfè, D., 2012, Thermal and electrical conductivity of iron at Earth's core conditions, *Natur*, 485, 355–358
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P., 1992, *Numerical recipes in FORTRAN*, Cambridge University Press, Cambridge
- Pudovkin, M. I., Semenov, V. S., 1977, Stationary frozen-in co-ordinate system, *Annales de Geophysique*, 33, 429–433
- Pudovkin, M. I., Besser, B. P., Zaitseva, S. A., 1998, Magnetopause stand-off distance in dependence on the magnetosheath and solar wind parameters, *Annales Geophysicae*, 16, 388–396
- Pudovkin, M. I., Zaitseva, S. A., Besser, B. P., 2002, Magnetosheath current system and the magnetopause erosion, in *Proc. 4th Intern. Conf. Problems of Geocosmos (St. Petersburg, 3-8 June 2002)*, (Hg.) V. S. Semenov, A. M. Lyatskaya, M. V. Kubyshkina, H. K. Biernat, S. 83–89, University of St. Petersburg, St. Petersburg
- Rikitake, T., 1966, *Electromagnetism and the earth's interior*, Developments in solid earth geophysics, Elsevier Publishing Company, Amsterdam
- Ruff, L., Anderson, D. L., 1980, Core formation, evolution, and convection - A geophysical model, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 21, 181–201
- Russell, C. T., 1971, Geophysical coordinate transformations., *Cosmic Electrodynamics*, 2, 184–196
- Scholer, M., 1989, Undriven magnetic reconnection in an isolated current sheet, *Journal of Geophysical Research*, 94, 8805–8812
- Shue, J.-H., Song, P., Russell, C. T., Steinberg, J. T., Chao, J. K., Zastenker, G., Vaisberg, O. L., Kokubun, S., Singer, H. J., Detman, T. R., Kawano, H., 1998, Magnetopause location under extreme solar wind conditions, *Journal of Geophysical Research*, 103, 17 691–17 700
- Siscoe, G. L., 1983, Solar system magnetohydrodynamics, in *Solar-Terrestrial Physics: Principles and Theoretical Foundations*, (Hg.) R. L. Carovillano, J. M. Forbes, S. 11–100, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht
- Siscoe, G. L., Crooker, N. U., Erickson, G. M., Sonnerup, B. U. Ö., Maynard, N. C., Schoendorf, J. A., Siebert, K. D., Weimer, D. R., White, W. W., Wilson, G. R., 2002, MHD properties of magnetosheath flow, *Planetary and Space Science*, 50, 461–471
- Slavin, J. A., Holzer, R. E., 1981, Solar wind flow about the terrestrial planets. I - Modeling bow shock position and shape, *Journal of Geophysical Research*, 86, 11 401–11 418

- Solomon, S. C., 1976, Some aspects of core formation in Mercury, *Icarus*, 28, 509–521
- Solomon, S. C., McNutt, R. L., Gold, R. E., Acuña, M. H., Baker, D. N., Boynton, W. V., Chapman, C. R., Cheng, A. F., Gloeckler, G., Head, III, J. W., Krimigis, S. M., McClintock, W. E., Murchie, S. L., Peale, S. J., Phillips, R. J., Robinson, M. S., Slavin, J. A., Smith, D. E., Strom, R. G., Trombka, J. I., Zuber, M. T., 2001, The MESSENGER mission to Mercury: scientific objectives and implementation, *Planetary and Space Science*, 49, 1445–1465
- Spitzer, L., 1956, *Physics of Fully Ionized Gases*
- Spreiter, J. R., Summers, A. L., Alksne, A. Y., 1966, Hydromagnetic flow around the magnetosphere, *Planetary and Space Science*, 14, 223–253
- Stadelmann, A., Vogt, J., Glassmeier, K.-H., Kallenrode, M.-B., Voigt, G.-H., 2010, Cosmic ray and solar energetic particle flux in paleomagnetospheres, *Earth, Planets, and Space*, 62, 333–345
- Stanley, S., Bloxham, J., Hutchison, W. E., Zuber, M. T., 2005, Thin shell dynamo models consistent with Mercury's weak observed magnetic field, *Earth and Planetary Science Letters*, 234, 27–38
- Stevenson, D. J., 1983, Planetary magnetic fields, *Reports on Progress in Physics*, 46, 555–557
- Stevenson, D. J., 2010, Planetary Magnetic Fields: Achievements and Prospects, *Space Science Reviews*, 152, 651–664
- Sweet, P. A., 1958, The Neutral Point Theory of Solar Flares, in *Electromagnetic Phenomena in Cosmical Physics*, (Hg.) B. Lehnert, S. 123–134, Cambridge University Press, London
- Treumann, R. A., 2001, Origin of resistivity in reconnection, *Earth, Planets, and Space*, 53, 453–462
- Tsyganenko, N. A., 1995, Modeling the Earth's magnetospheric magnetic field confined within a realistic magnetopause, *Journal of Geophysical Research*, 100, 5599–5612
- Tsyganenko, N. A., 1996, Effects of the solar wind conditions in the global magnetospheric configurations as deduced from data-based field models, in *Proceedings of 3rd Int. Conf. on Substorms (ICS-3)*, (Hg.) E. J. Rolfe, B. Kaldeich, S. 181–185, European Space Agency, Paris
- Ugai, M., Tsuda, T., 1977, Magnetic field-line reconnexion by localized enhancement of resistivity. I - Evolution in a compressible MHD fluid, *Journal of Plasma Physics*, 17, 337–356
- Utke, J., Naumann, U., Fagan, M., Tallent, N., Strout, M., Heimbach, P., Hill, C., Wunsch, C., 2008, OpenAD/F: A modular, open-source tool for automatic differentiation of Fortran codes, *ACM Transactions on Mathematical Software*, 34, 18:1–18:36

- Vogt, J., Glassmeier, K. H., 2000, On the location of trapped particle populations in quadrupole magnetospheres, *Journal of Geophysical Research*, 105, 13 063–13 072
- Wang, Y., Raeder, J., Russell, C. T., 2004, Plasma depletion layer: Magnetosheath flow structure and forces, *Annales Geophysicae*, 22, 1001–1017
- Weimer, D. R., 2004, Correction to “Predicting interplanetary magnetic field (IMF) propagation delay times using the minimum variance technique”, *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, 109, A12104
- Weimer, D. R., Ober, D. M., Maynard, N. C., Collier, M. R., McComas, D. J., Ness, N. F., Smith, C. W., Watermann, J., 2003, Predicting interplanetary magnetic field (IMF) propagation delay times using the minimum variance technique, *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, 108, 1026
- Wengert, R. E., 1964, A simple automatic derivative evaluation program, *Communications of the ACM*, 7(8), 463–464
- Winslow, R. M., Anderson, B. J., Johnson, C. L., Slavin, J. A., Korth, H., Purucker, M. E., Baker, D. N., Solomon, S. C., 2013, Mercury’s magnetopause and bow shock from MESSENGER Magnetometer observations, *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, 118, 2213–2227
- Wu, C. C., 1992, MHD flow past an obstacle - Large-scale flow in the magnetosheath, *Geophysical Research Letters*, 19, 87–90
- Yan, M., Lee, L. C., Priest, E. R., 1992, Fast magnetic reconnection with small shock angles, *Journal of Geophysical Research*, 97, 8277–8293
- Zita, E. J., 2013, Analytic Origin of Advection of Magnetic Fields by Diffusivity Gradients, *ArXiv e-prints*, 1309.4398
- Zwan, B. J., Wolf, R. A., 1976, Depletion of solar wind plasma near a planetary boundary, *Journal of Geophysical Research*, 81, 1636–1648

# Danksagung

Diese Arbeit ist im Rahmen meiner Tätigkeit am Institut für Geophysik und extraterrestrische Physik der Technischen Universität Braunschweig entstanden. Ich möchte mich bei allen Leuten bedanken, die mich in dieser Zeit unterstützt haben und in irgendeiner Weise zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben.

Ganz besonders möchte ich mich bei Prof. Karl-Heinz Glaßmeier bedanken, der es mir ermöglichte, als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Geophysik und extraterrestrische Physik zu forschen. Im Rahmen dieser Tätigkeit ist auch diese Arbeit entstanden. Die vielen anregenden Diskussionen über Physik im Allgemeinen und im Speziellen haben mir stets viel Spaß bereitet. Daraus sind immer wieder neue Ideen entstanden, die den Inhalt dieser Arbeit mitgestaltet haben. Dabei bekam ich stets die Möglichkeit, Ergebnisse meiner Arbeit auf vielen internationalen Konferenzen vorzustellen und in Fachjournalen zu veröffentlichen. Weiterhin bekam ich die Gelegenheit, vorlesungsbegleitende Übungen zu betreuen, die Vorlesung der Daten- und Signalanalyse während eines Forschungssemesters zu vertreten und am Magnetometerexperiment der BepiColombo-Mission mitzuwirken. Für die intensive Betreuung und Förderung bedanke ich mich herzlich.

Mein Dank gilt auch Prof. Uwe Motschmann, der es mir ermöglichte, die Übungen zur Vorlesung Plasmaphysik zu halten. Dabei konnte ich von seinem großen Erfahrungsschatz und strukturierten Vorlesungsskript profitieren. Es ergaben sich viele spannende Gespräche zur Vorbereitung der Übungen, die mir auch immer wieder neue Einblicke in die Plasmaphysik gaben. Weiterhin möchte ich mich dafür bedanken, dass er sich bereit erklärt hat, diese Arbeit zu begutachten.

Ich danke Dr. Carsten Othmer, der mir die grundlegenden Einblicke zur Verwendung der adjungierten Methode gegeben hat. Dabei konnte ich von seinem Wissen insbesondere über die Anwendung der adjungierten Methode durch das automatische Differenzieren profitieren.

Ich danke Prof. Tatsuki Ogino und Dr. Keiichiro Fukazawa für die Bereitstellung einer Version ihres MHD-Simulationscodes. Auf diesem aufbauend wurde der MHD-Simulationscode in dieser Arbeit entwickelt.

Mein Dank gilt auch Dr. Daniel Heyner, der mir wichtige Einblicke in die Physik am Planeten Merkur gegeben hat. So lernte ich viel über den aktuellen Stand der Forschung bei Merkur, die Ergebnisse der MESSENGER-Mission und den inneren Aufbau des Planeten.

Weiterhin gilt mein Dank der Firma FastOpt, die den MHD-Simulationscode über automatisches Differenzieren adjungiert hat.

Vielen Dank auch an die Mitglieder des Instituts für Geophysik und extraterrestrische Physik, insbesondere für die tolle Arbeitsatmosphäre, die meine Arbeit am Institut so bereichert hat.

Abschließend bedanke ich mich bei meiner Familie, meinen Freunden und ganz besonders bei meiner Frau für ihre seelische und mentale Unterstützung.